L2 MATHS - Probabilités 1- 2018-2019
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé du contrôle no 3, sujet A

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Puisque $\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)=1$, nous avons $\mathbb{P}(X=3)=1/4$. Nous calculons donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{4}\times 3\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\\ &= \frac{7}{4}\,.\end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) Nous notons X_1 le sexe du premier enfant ($X_1=G$ avec probabilité 1/2, $X_1=F$ avec probabilité 1/2) et X_2 le sexe du deuxième enfant. Nous calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=X_2=G|G\in\{X_1,X_2\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{X_1=X_2=G\}\cap\{G\in\{X_1,X_2\}\})}{\mathbb{P}(G\in\{X_1,X_2\})}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1=X_2=G)}{\mathbb{P}(G\in\{X_1,X_2\})}\\ &= \frac{(1/4)}{1-\mathbb{P}(G\notin\{X_1,X_2\})}\\ &= \frac{(1/4)}{1-(1/4)}=\frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

(2) Nous notons I l'indice de l'enfant choisi au hasard ($\mathbb{P}(I=1)=\mathbb{P}(I=2)=1/2$). Nous calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=X_2=G|X_I=G) &= \frac{\mathbb{P}(\{X_1=X_2=G\}\cap\{X_I=G\})}{\mathbb{P}(X_I=G)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1=X_2=G)}{\mathbb{P}(\{I=1,X_1=G\}\cup\{I=2,X_2=G\})}\\ \text{(réunion d'événements disjoints)} &= \frac{\mathbb{P}(X_1=X_2=G)}{\mathbb{P}(I=1,X_1=G)+\mathbb{P}(I=2,X_2=G)}\\ \text{(événements indépendants)} &= \frac{\mathbb{P}(X_1=X_2=G)}{\mathbb{P}(I=1)\mathbb{P}(X_1=G)+\mathbb{P}(I=2)\mathbb{P}(X_2=G)}\\ &= \frac{(1/4)}{(1/2)(1/2)+(1/2)(1/2)}\\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Exercice 3. Nous notons X_1, X_2, X_3 les résultats des lancers de dé.

(1) Nous calculons (en utilisant l'indépendance)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1,X_2,X_3\leq 3) &= \mathbb{P}(X_1\leq 3)\mathbb{P}(X_2\leq 3)\mathbb{P}(X_3\leq 3)\\ &= \left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

(2) Nous calculons (en utilisant l'indépendance)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_1,X_2,X_3)\neq(6,6,6)) &= 1-\mathbb{P}((X_1,X_2,X_3)=(6,6,6))\\ &= 1-\left(\frac{1}{6}\right)^3\\ &= \frac{215}{216}\,.\end{aligned}$$

Exercice 4. Nous notons D l'événement « l'expert détecte un trésor » et T l'événement « le coffre contient un trésor ». D'après l'énoncé, nous avons

$$\mathbb{P}(T)=1/200\,;\,\mathbb{P}(D|T)=0,8\,;\,\mathbb{P}(D|T^{\complement})=0,02\,.$$

Nous calculons (en utilisant la formule de Bayes et la formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(D)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(D|T)\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(D|T^{\complement})\mathbb{P}(T^{\complement})}\\ &= \frac{(0,8/200)}{0,8/200+0,02\times 199/200}\\ &= \frac{4.10^{-3}}{4.10^{-3}+2.10^{-2}-1.10^{-4}}\\ &= \frac{4.10^{-3}}{4.10^{-3}+20.10^{-3}-0,1.10^{-3}}\\ &= \frac{4}{23,9}\,.\end{aligned}$$

Exercice 5.

(1) La variable X_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Nous calculons, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=n) &= \sum_{k\geq n}\mathbb{P}(X=k,X_1=n)\\ &= \sum_{k\geq n}\mathbb{P}(X_1=n|X=k)\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k\geq n}C_k^n p^n(1-p)^{k-n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^n\sum_{k\geq n}(1-p)^k\frac{1}{n!(n-k)!}\lambda^k e^{-\lambda}\\ \text{(changement d'indice)} &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^n\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n\sum_{i\geq 0}(1-p)^i\lambda^i\frac{e^{-\lambda}}{i!}\\ &= \frac{p^n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\,.\end{aligned}$$

Donc X_1 est de loi $\mathcal{P}(p\lambda)$.

(2) De même que ci-dessus, nous pouvons montrer que $X_2 \sim \mathcal{P}((1-p)\lambda)$. Nous avons $\mathbb{E}(X_1) = p\lambda$, $\mathbb{E}(X_2) = (1-p)\lambda$. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} k(n-k)\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} k(n-k)\mathbb{P}(X_1 = k, X = n) \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k+1} k(n-k)C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k+1} \frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!}p^k(1-p)^{n-k}\lambda^n e^{-\lambda} \\
\text{(changement d'indice)} &= \sum_{k\geq 1}\frac{p^k}{(k-1)!}(1-p)\lambda^{k+1}\sum_{i\geq 0}\frac{(1-p)^i\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{p^k}{(k-1)!}(1-p)\lambda^{k+1}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 p(1-p)\sum_{k\geq 1}\frac{p^{k-1}}{(k-1)!}\lambda^{k-1}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 p(1-p)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

(3) Pour tout k dans $\mathbb{N}$ et $n \geq k$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k) &= \mathbb{P}(X_1 = k, X = n) \\
&= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \frac{p^k(1-p)^{n-k}\lambda^n e^{-\lambda}}{k!(n-k)!}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k) &= \frac{(p\lambda)^k e^{-p\lambda}}{k!} \times \frac{(p\lambda)^{n-k}e^{-(1-p)\lambda}}{(n-k)!} \\
&= \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k)\,.
\end{aligned}$$

Donc X_1 et X_2 sont indépendants.