M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2018-2019
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Nom :

Prénom :

Contrôle no 2, sujet B (durée 1h45)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice..

Exercice 1. Nous définissons des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = x^2 \, , \, \psi(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \, .$$

On s'intéresse à l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\psi(x)dx \, .$$

(1) Comment simuler une variable de densité ψ ?

(2) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée, en utilisant la simulation de variable aléatoire de la question précédente.

(3) On s'intéresse maintenant au programme 1. Quelle est la loi des variables `x` simulées par ce programme ?

Programme 1 Monte-Carlo

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=sqrt(-2*log(1-u))
  s=s+sqrt(2/pi)*x
}
print(s/n)
```

(4) Montrer que le programme 1 constitue en fait une tentative de réduction de variance de la méthode que vous avez proposée dans la question 2. Quelle est la méthode de réduction de variance utilisée ?

Exercice 2. Nous définissons les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\exp(-x^{3/2})}{C} \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x) \text{ avec } C = \int_1^{+\infty} e^{-x^{3/2}} dx \, ,$$

$$g(x) = \frac{2 \times \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)}{x^3} \, .$$

(1) Montrer que, pour tout $x \geq 1$,

$$f(x) \leq \frac{1}{C} \times g(x) \, .$$

(2) Comment simuler une variable de loi de densité g ?

(3) Écrire un programme qui simule une variable de loi de densité f. Écrire la justification sur la copie et le programme dans le cadre ci-dessous.