Université Nice Sophia-Antipolis
L3 MATHS, 2021-2022
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Analyse complexe, contrôle no 1, sujet B

Documents et calculatrices interdits.

DURÉE : 1h30.

Exercice 1. (5 points) Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ avec x_0, y_0 dans $\mathbb{R}$.

(1) Monter que $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z_0 \times \overline{z}$ est ($\mathbb{R}$)-linéaire comme application de $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(2) Écrire la matrice de f (comme application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2. (5 points) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+iy) = yx^2 + ix$. On rappelle les formules

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

(1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

(2) Est-ce que f est holomorphe ?

Exercice 3. (5 points) Soit f une fonction holomorphe de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la partie réelle est constante égale à 1. Montrer que f est constante.

Exercice 4. (5 points) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

(1) $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2} z^n$,

(2) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} z^{2n}$.