Université Nice Sophia-Antipolis
M1 IM, 2021-2022
`https://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Séries temporelles, contrôle no 3, sujet B

Documents et calculatrices interdits. Rendre l'énoncé avec la copie (+0,5 point !). Pour le QCM : répondre sur la copie, sans justification, une seule réponse par question, un point par réponse juste (zéro pour une réponse fausse).

DURÉE : 2h.

1. QCM (6 POINTS)

(1) Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est stationnaire si
  (a) Il ne tend pas vers l'infini.
  (b) $(\mathbb{E}(X_t))_{t\geq 0}$ est constante et $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$ ne dépend pas de t pour tout $h > 0$.
  (c) La loi de X_t ne dépend pas de t.

(2) On s'intéresse aux processus X vérifiant l'équation $X_t = \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \epsilon_t$ (avec (ϵ_t) bruit blanc). Est-ce qu'il existe une solution stationnaire à cette équation ?
  (a) Oui.
  (b) Non.

(3) L'auto-corrélation d'un processus est noté $h \mapsto \rho(h)$. L'auto-corrélation empirique d'un processus est notée $h \mapsto \widehat{\rho}(h)$. Laquelle des proposition suivantes est vraie ?
  (a) Pour tout h, $\widehat{\rho}(h)$ tend vers $\rho(h)$ quand le nombre d'observations tend vers l'infini.
  (b) $|\widehat{\rho}(h)| \leq |\rho(h)|$ pour tout h.
  (c) $\rho = \widehat{\rho}$

(4) On s'intéresse à une série $(X_t)_{1\leq t\leq n}$ dont on a calculé les auto-corrélations et auto-corrélations partielles (empiriques) dans la Figure 1.1 Choisissez la proposition la plus probable.

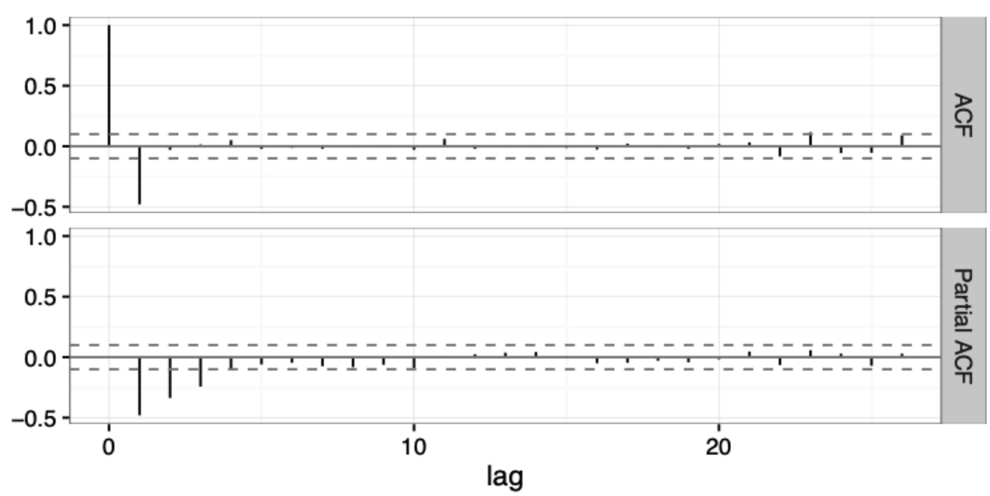

FIGURE 1.1. ACF et PACF

  (a) C'est un AR(3).
  (b) C'est un MA(1).
  (c) C'est un ARMA(3,1).

(5) Sous l'hypothèse que les résidues `out$resid` sont un bruit blanc (hypothèse (H0)), une certain statistique de ces résidus doit suivre une loi du $\chi 2$. Je veux tester cette hypothèse au niveau 0.01. J'utilise la commande `R` ad hoc (`Box.test(out$resid,lag=5))` et l'ordinateur me donne la réponse suivante `X-squared = 0.1046, df = 5, p-value = 0.046152`. Je dois

(a) garder (H0),

(b) rejeter (H0).

(6) Soit $(X_t)_{t\geq 1}$ un processus GARCH. Nous avons découvert que $(X_t^2)_{t\geq 0}$ est un ARMA(4,3). Que pouvons nous conclure ?

(a) (X_t) est un GARCH(4,3).

(b) (X_t) est un GARCH(3,4).

(c) Aucune des réponses ci-dessus.

2. Exercices

(1) (**7 points**) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus MA(1) d'équation

$$X_t = \frac{Z_t}{\theta} + Z_{t-1}$$

avec des Z_t i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$, $\theta \in \mathbb{R}^*$.

(a) Calculer $\rho(1)$ (ρ est la fonction de corrélation du processus (X_t)).

(b) Trouver la valeur θ^* pour θ telle que $\rho(1)$ soit le plus grand possible.

(c) Calculer la fonction de covariance du processus (nous la noterons σ).

(d) Calculer la densité spectrale de (X_t) pour $\theta = \theta^*$. Rappel : la densité spectrale est la fonction

$$f \,:\, \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-ih\lambda}\sigma(h)\,.$$

(2) (**7 points)** On s'intéresse à un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie l'équation :

$$X_t + \frac{X_{t-1}}{2} = Z_t$$

avec Z_t de loi $\mathcal{N}(0;1)$ (les Z_t sont i.i.d. et pour tout t, Z_t est indépendant de X_t). Nous avons observé X_1, X_3 et nous avons raté X_2. Nous aimerons trouver un estimateur $\widehat{X}_2$ tel que $\mathbb{E}((X_2-\widehat{X}_2)^2)$ est le plus petit possible. Cet estimateur a la forme : $\widehat{X}_2 = a_1X_1 + a_3X_3$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ pour tout t. Nous noterons dans la suite $\mathbb{E}(X_t^2) = \sigma^2$, pour tout t.

(b) Calculer σ^2.

(c) Trouver a_1 et a_3 tels que $\mathbb{E}((X_2-\widehat{X}_2)^2)$ soit le plus petit possible.

(d) Quelle est la valeur du minimum atteint par $\mathbb{E}((X_2-\widehat{X}_2)^2)$?