

Corrigé du contrôle terminal, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. On observe que les auto-corrélations s'annulent à partir du rang 3 et que les auto-corrélations tendent partiellement vers 0. Donc le processus est un $AM(2)$.

Exercice 2. Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Programme

```
al=1/10 s=0
for (j in 50:99)
{
  xw=window(x,1,i)
  xlisser<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=al,gamma=FALSE)
  p<-predict(xlisser,n.ahead=1)
  s=s+(p-x[i+1])^2
}
min=s
almin=al
for (i in 2:9)
{
  al=i/10;
  s=0
  for (j in 50:99)
  {
    xw=window(x,1,i)
    xlisser<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=al,gamma=FALSE)
    p<-predict(xlisser,n.ahead=1)
    s=s+(p-x[i+1])^2
  }
  if (s<min)
  {
    min=s; almin=al
  }
}
cat("meilleur paramètre trouvé : alpha =",almin)
```

Exercice 3. Le polynôme caractéristique de ce processus est

$$P(X) = 1 - b_1X - b_2X^2 - b_3X^3.$$

Pour qu'il existe un processus stationnaire vérifiant cette relation, il suffit que les racines de P soient toutes de module > 1 . Je choisis donc

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(1 - \frac{X}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{X}{3}\right) \\ &= \left(1 - X + \frac{X^2}{4}\right) \left(1 - \frac{X}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{4}{3}X - \frac{1}{12}X^2 - \frac{1}{12}X^3. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $b_1 = \frac{4}{3}$, $b_2 = \frac{1}{12}$, $b_3 = \frac{1}{12}$.

Exercice 4.

(1) Nous calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_t) &= \mathbb{E}\left(\left(X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t\right)^2\right) \\ \sigma(0) &= \sigma(0) + \frac{1}{4}\sigma(0) + 1 - \sigma(1).\end{aligned}$$

D'où la relation

$$\frac{\sigma(0)}{4} - \frac{\sigma(1)}{2} + 1 = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_{t-1}) &= \mathbb{E}\left(\left(X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t\right)X_{t-1}\right) \\ \sigma(1) &= \sigma(0) - \frac{1}{2}\sigma(1) \\ \frac{3}{2}\sigma(1) &= \sigma(0).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}\sigma(1) - \frac{1}{2}\sigma(1) &= -1 \\ \sigma(1) &= 8,\end{aligned}$$

et

$$\sigma(0) = 12.$$

(2) Les $\sigma(h)$ vérifie la relation de récurrence

$$\sigma(h) = \sigma(h-1) - \frac{1}{2}\sigma(h-2),$$

de polynôme caractéristique

$$Q(X) = X^2 - X + \frac{1}{2}.$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\left\{ \frac{1+i}{2}; \frac{1-i}{2} \right\}.$$

Donc la solution est de la forme

$$\sigma(h) = a \left(\frac{1+i}{2}\right)^h + b \left(\frac{1-i}{2}\right)^h; a, b \in \mathbb{C}.$$

Pour trouver a et b , nous résolvons le système

$$\begin{cases} a + b &= 12 \\ a \left(\frac{1+i}{2}\right) + b \left(\frac{1-i}{2}\right) &= 8. \end{cases}$$

Nous avons $b = 12 - a$ et donc

$$\begin{aligned}a(1+i) + (12-a)(1-i) &= 16 \\ 2ai &= 16 - 12 + 12i \\ ai &= 2 + 6i \\ a &= 6 - 2i\end{aligned}$$

et

$$b = 6 + 2i.$$

D'où la formule

$$\sigma(h) = (6-2i) \left(\frac{1+i}{2}\right)^h + (6+2i) \left(\frac{1-i}{2}\right)^h = \mathcal{R} \left((3-i) \left(\frac{1+i}{2}\right)^h \right), \forall h \in \mathbb{N}.$$

Exercice 5.

- (1) `acf(x, lag=50); acf(x2, lag=50)` (on note `x2` pour $\Delta^2 x$)
- (2) Les auto-corrélations s'annulent à partir du rang 3, tandis que les auto-corrélations partielles tendent vers 0 sans s'annuler. Le processus ressemble donc plus à MA(2).
- (3) Le processus est donc un ARIMA(0,2,2).