Nom :

Prénom :

M1 IM - Séries temporelles - 2022-2023
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

# Contrôle terminal, sujet B (durée 2h)

*Documents et calculatrices interdits (sauf polycopié). La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.*

**Exercice 1.** On observe que les auto-corrélations partielles s'annulent à partir du rang 3 et que les auto-corrélations tendent vers 0. Donc le processus est un $AR(2)$.

**Exercice 2.** Voir l'algorithme 1.

**Algorithme 1** Programme

```
al=1/10 s=0
for (j in 50:99)
{
 xw=window(x,1,i)
 xlisse<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=al,gamma=FALSE)
 p<-predict(xlisse,n.ahead=1)
 s=s+(p-x[i+1])^2
}
min=s
almin=al
for (i in 2:9)
{
 al=i/10;
 s=0
 for (j in 50:99)
 {
  xw=window(x,1,i)
  xlisse<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=al,gamma=FALSE)
  p<-predict(xlisse,n.ahead=1)
  s=s+(p-x[i+1])^2
 }
 if (s<min)
 {
  min=s; almin=al
 }
}
cat("meilleur paramètre trouvé : alpha =",almin)
```

**Exercice 3.** Le polynôme caractéristique de ce processus est

$$P(X) = 1 - b_1X - b_2X^2 - b_3X^3\,.$$

Pour qu'il existe un processus stationnaire vérifiant cette relation, il suffit que les racines de $P$ soient toutes de module $> 1$. Je choisis donc

$$\begin{aligned} P(X) &= (1-\frac{X}{2})^2(1-\frac{X}{3}) \\ &= (1-X+\frac{X^2}{4})(1-\frac{X}{3}) \\ &= 1-\frac{4}{3}X-\frac{1}{12}X^2-\frac{1}{12}X^3 \,. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $b_1 = \frac{4}{3}$, $b_2 = \frac{1}{12}$, $b_3 = \frac{1}{12}$.

**Exercice 4.**

(1) Nous calculons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_t) &= \mathbb{E}((X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t)^2) \\ \sigma(0) &= \sigma(0) + \frac{1}{4}\sigma(0) + 1 - \sigma(1) \,. \end{aligned}$$

D'où la relation

$$\frac{\sigma(0)}{4} - \frac{\sigma(1)}{2} + 1 = 0 \,.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t-1}) &= \mathbb{E}((X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t)X_{t-1}) \\ \sigma(1) &= \sigma(0) - \frac{1}{2}\sigma(1) \\ \frac{3}{2}\sigma(1) &= \sigma(0) \,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}\sigma(1) - \frac{1}{2}\sigma(1) &= -1 \\ \sigma(1) &= 8 \,, \end{aligned}$$

et

$$\sigma(0) = 12 \,.$$

(2) Les $\sigma(h)$ vérifie la relation de récurrence

$$\sigma(h) = \sigma(h-1) - \frac{1}{2}\sigma(h-2) \,,$$

de polynôme caractéristique

$$Q(X) = X^2 - X + \frac{1}{2} \,.$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\left\{ \frac{1+i}{2} \,;\, \frac{1-i}{2} \right\} .$$

Donc la solution est de la forme

$$\sigma(h) = a\left(\frac{1+i}{2}\right)^h + b\left(\frac{1-i}{2}\right)^h \;;\, a, b \in \mathbb{C} \,.$$

Pour trouver $a$ et $b$, nous résolvons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b &=& 12 \\ a\left(\frac{1+i}{2}\right) + b\left(\frac{1-i}{2}\right) &=& 8 \,. \end{array} \right.$$

Nous avons $b = 12 - a$ et donc

$$\begin{aligned} a(1+i) + (12-a)(1-i) &= 16 \\ 2ai &= 16 - 12 + 12i \\ ai &= 2 + 6i \\ a &= 6 - 2i \end{aligned}$$

et

$$b = 6 + 2i\,.$$

D'où la formule

$$\sigma(h) = (6-2i)\left(\frac{1+i}{2}\right)^h + (6+2i)\left(\frac{1-i}{2}\right)^h = \mathcal{R}\left((3-i)\left(\frac{1+i}{2}\right)^h\right)\,, \forall h \in \mathbb{N}\,.$$

**Exercice 5.**

(1) `acf(x,lag=50);acf(x2,lag=50)` (on note `x2` pour $\Delta^2 x$)

(2) Les auto-corrélations s'annulent à partir du rang 3, tandis que les auto-corrélations partielles tendent vers 0 sans s'annuler. Le processus ressemble donc plus à MA(2).

(3) Le processus est donc un ARIMA(0,2,2).