Nom :

Prénom :

M1 IM - Séries temporelles - 2022-2023
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Contrôle terminal, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits (sauf polycopié). La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. On s'intéresse à une série temporelle `x` dont nous avons tracé les auto-corrélations et les auto-corrélations partielles dans la figure 0.1. Le processus est-il plutôt un AR ou un AM ?

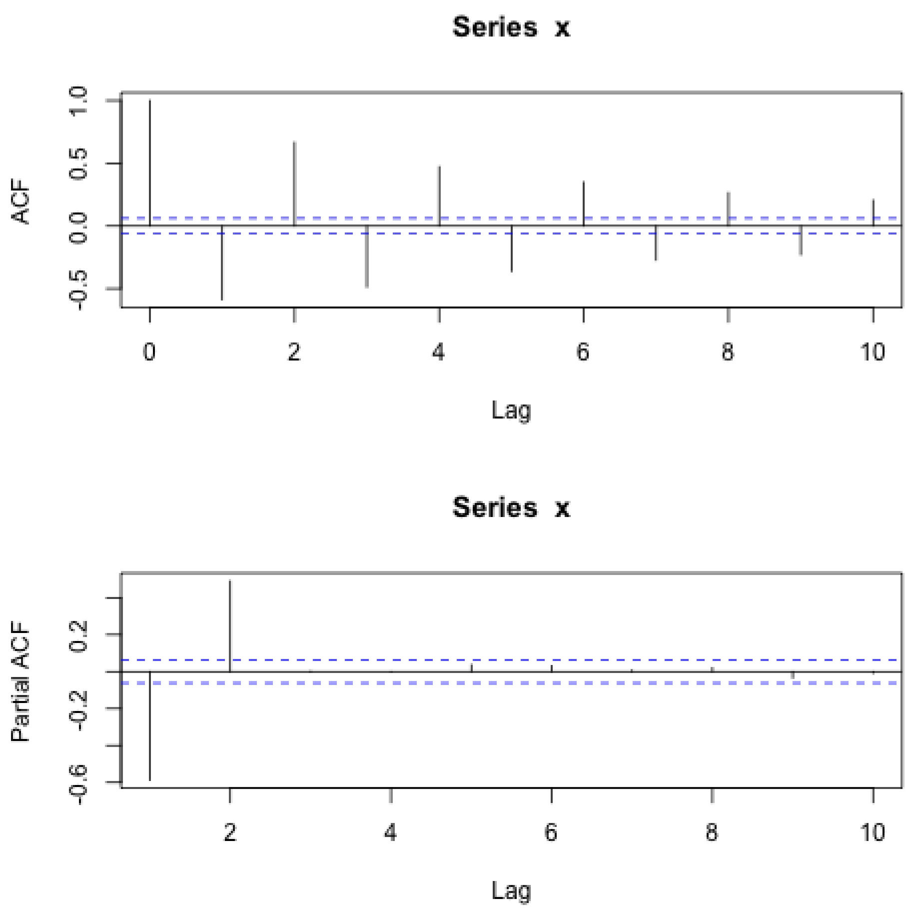

FIGURE 0.1. Auto-corrélations et auto-corrélations partielles

de quel ordre ? Répondre dans le cadre ci-dessous (en précisant l'ordre du processus).

Exercice 2. Soit `x` une série temporelle de longueur 100. Pour α dans la liste $\{0,1;0,2;0,3;\ldots;0,9\}$, on note $\widehat{x}_{t,1}^{(\alpha)}$ la prédiction en $t+1$ obtenue avec le lissage de Holt-Winters sans saisonnalité de paramètres (α,α). Pour α fixé et t allant de 50 à 99, on fait la somme des carrés des erreurs de prédiction et on la note SE_α. Écrire un programme `R` qui trouve α minimisant SE_α pour α dans la liste ci-dessus.

Exercice 3. Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ une suite de bruits blancs centrés. Trouver b_1, b_2, b_3 dans $\mathbb{R}$ tels que : $b_3 \neq 0$ et il existe un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence

$$X_t = b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + b_3 X_{t-3} + \epsilon_t\,,\ \text{pour } t \geq 3\,.$$

Exercice 4. Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ une suite de bruits blancs centrés, de variance 1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stationnaire vérifiant la relation de récurrence

$$X_t = X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t\,,\ \text{pour } t \geq 2\,.$$

Soit σ la fonction d'auto-covariance de $(X_t)_{t\geq 0}$.

(1) Calculer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$.

(2) Calculer $\sigma(h)$ pour tout h dans $\mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit une série temporelle $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($n = 100$). Le graphe de cette série est visible dans la figure 0.2, en haut.

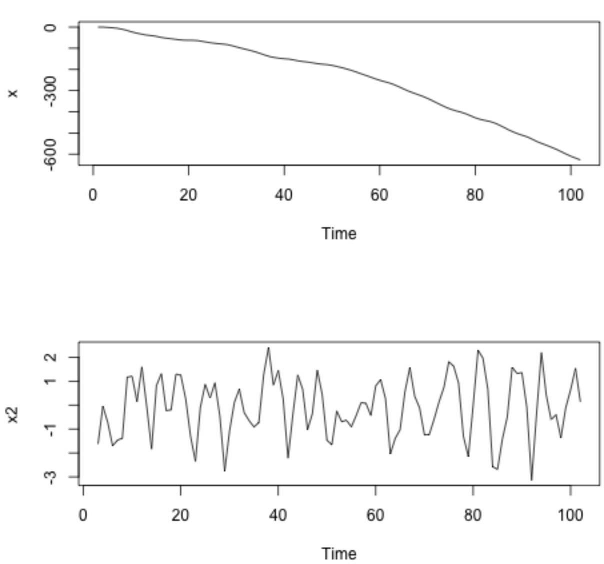

FIGURE 0.2. Graphe de x (en haut) et de $\Delta^2 x$ (en bas).

(1) On suppose que $\Delta^2 x$ est un processus stationnaire (voir la figure 0.2, en bas pour le graphe de $\Delta^2 x$). Écrire les commandes `R` permettant de tracer les auto-corrélations (empiriques) et les auto-corrélations partielles (empiriques) de $\Delta^2 x$ (elles sont tracées dans la figure 0.3). Répondre dans la case ci-dessous.

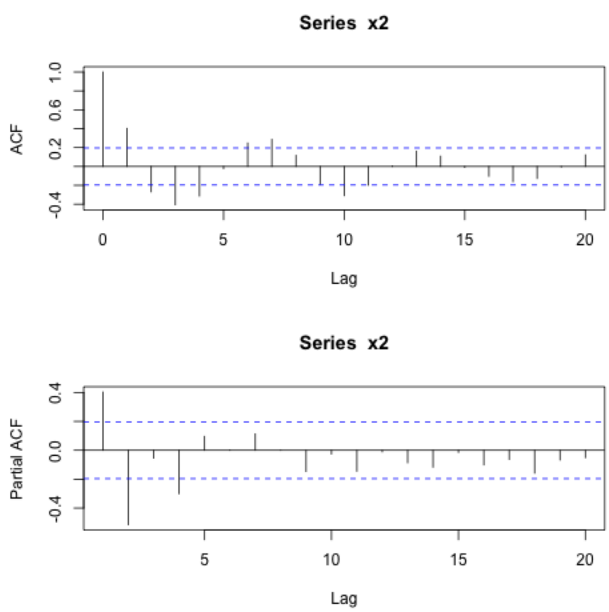

FIGURE 0.3. Auto-corrélations et auto-corrélations partielles de $\Delta^2 x$.

(2) Le processus $\Delta^2 x$ ressemble-t-il plus à un $AR(p)$ ou un $MA(q)$? Pour quel p ou q ?

(3) À quelle classe appartient le processus x ?