Université Nice Sophia Antipolis - M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
`http://math.unice.fr/rubentha/cours.html`

CORRIGÉS POUR LE CHAPITRE 4

Exercise 1. (1) Soient (x, u) et (y, v) dans $E \times F$. Le noyau Q est irréductible donc il existe n dans $\mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n$, tels que

$$Q(x, x_1)Q(x_1, x_2) \dots Q(x_{n-1}, x_n)Q(x_n, y) > 0\,.$$

Nous avons, par hypothèse,

$$K(x_1, v)K(x_2, v) \dots K(x_n, v)K(y, v) > 0\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\overline{Q}((x,u),(x_1,v))\overline{Q}((x_1,v),(x_2,v))\dots\overline{Q}((x_n,v),(y,v))&\\ = Q(x,x_1)K(x_1,v)Q(x_1,x_2)K(x_2,v)\dots Q(x_n,y)K(y,v) > 0\,.&\end{aligned}$$

Donc le noyau $\overline{Q}$ est irréductible et, de plus, pour tout $n \in N^*$, $x, y \in E$, $u, v \in F$

$$Q^n(x,y) > 0 \Rightarrow \overline{Q}^n((x,u),(y,v)) > 0\,. \tag{1}$$

(2) On remarque que pour tous $x_n, x^*_{n+1} \in E$, $u_n, u^*_{n+1} \in F$,

$$\begin{aligned}\frac{Z(x^*_{n+1},u^*_{n+1})Q(x^*_{n+1},x_n)}{Z(x_n,u_n)Q(x_n,x^*_{n+1})} &= \frac{Z(x^*_{n+1},u^*_{n+1})K(x^*_{n+1},u^*_{n+1})Q(x^*_{n+1},x_n)K(x_n,u_n)}{Z(x_n,u_n)K(x_n,u_n)Q(x_n,x^*_{n+1})K(x^*_{n+1},u^*_{n+1})}\\ &= \frac{Z(x^*_{n+1},u^*_{n+1})K(x^*_{n+1},u^*_{n+1})\overline{Q}((x^*_{n+1},u^*_{n+1}),(x_n,u_n))}{Z(x_n,u_n)K(x_n,u_n)\overline{Q}((x_n,u_n),(x^*_{n+1},u^*_{n+1}))}\,.\end{aligned}$$

Donc la chaîne $((X_n, U_n))_{n\geq 0}$ est une chaîne de Metropolis de noyau de proposition $\overline{Q}$ et de loi cible $C \times Z(.,.)K(.,.)$ (avec C constante telle que $\sum_{(x,u)\in E\times F} Z(x,u)K(x,u) = 1/C$).

(3) Si $\overline{Q}((x,u),(y,v)) > 0$ alors

$$\overline{Q}((y,v),(x,u)) = Q(y,x)K(x,u) > 0$$

d'après nos hypothèse. D'après le lemme 4.13 du cours, le noyau $\overline{P}$ est donc irréductible.

(4) Soit $(x,u) \in E \times F$, d'après l'équation (1), nous avons

$$\{n : \overline{Q}^n((x,u),(x,u)) > 0\} \subset \{n : Q^n(x,x) > 0\}\,.$$

Donc, puisque $d(x) = 1$ (car Q est apériodique), $d((x,u)) = 1$. D'après le lemme 4.7 du cours, $\overline{Q}$ est apériodique. Puisque $Z(.,.)$ ne s'annule jamais, nous avons $\overline{Q}((x,u),(y,v)) > 0 \Rightarrow \overline{Q}((y,v),(x,u)) > 0$ donc, pour $(x,u) \in E \times F$,

$$\{n : \overline{P}^n((x,u),(x,u)) > 0\} \subset \{n : \overline{Q}^n((x,u),(x,u)) > 0\}\,.$$

Donc (en utilisant encore le lemme 4.7), $\overline{P}$ est apériodique.

(5) Le noyau $\overline{P}$ est irréductible, apériodique et admet la probabilité invariante Z. D'après le théorème 4.8, $((X_n, U_n))_{n\geq 0}$ converge en loi vers $CZ(.,.)K(.,.)$. En particulier, si nous prenons une fonction
$$\varphi : E \to \mathbb{R}^+ ,$$
$$\mathbb{E}(\varphi(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{(x,u)\in E\times F} \varphi(x)CZ(x,u)K(x,u) = \sum_{x\in E} \varphi(x)Cz(x) .$$
Donc $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers $C \times z(.)$.

Exercise 2. (1) Pour tout n, la loi de X_{n+1} ne dépend que de X_n donc nous avons bien une chaîne de Markov.

(2) Pour tout x et y dans E tels que $y \neq x$,
$$\begin{aligned} P(x,y) &= q(y) \times \frac{p(y)}{cq(y)} \\ &= \frac{p(y)}{c} . \end{aligned}$$
D'où
$$P(x,x) = 1 - \sum_{y\neq x} P(x,y) = 1 - \sum_{y\neq x} \frac{p(y)}{c} .$$

(3) Pour tout n, on propose Y_{n+1} de loi q, que l'on accepte avec probabilité $p(Y_{n+1})/cq(Y_{n+1})$. C'est ce qui se passerait dans une méthode de rejet basée sur l'inégalité $p \leq cq$. Si on définit par récurrence les temps d'arrêt
- $T_0 = 0$,
- $T_{k+1} = \inf\{n > T_k : U_{n-1} < p(Y_n)/(cq(Y_n))\}$,

alors X_{T_1}, X_{T_2}, X_{T_3}, ... sont i.i.d. de loi p.

(4) Nous calculons pour tout x
$$\begin{aligned} \mu P(x) &= \mu(x)P(x,x) + \sum_{y\neq x} \mu(y)P(y,x) \\ &= \mu(x)\left(1 - \sum_{y\neq x} \frac{p(y)}{c}\right) + \sum_{y\neq x} \mu(y)\frac{p(x)}{c} . \end{aligned}$$
On voit donc que $pP = p$ (p est invariante pour P). La chaîne (X_n) est irréductible (pour tout $x \neq y$, on a toujours une probabilité non nulle d'aller de x à y). Comme l'espace est fini, nous savons alors que $(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} p$.