Offre de formation du département de Mathématique UNS

22 janvier 2020

Légende des couleurs : Les Unités d'Enseignement M pour tou-te-s intéressé-e-s sont en bleu, celles, M, orientées pour les plus intéressé-e-s sont en rouge et celles, MM, des méthodes mathématiques sont en vert.

Les cours sont de 2 heures.

Table des matières

1 Semestre 1

1.1 UE MM.S1.SV : Méthodes mathématiques 1 : Introduction aux probabilités et à la statistique (Portail B)

Responsable : Rémi Catellier

Partie I : Bases des probabilités *continues*.

- Représentation graphique d'une fonction d'une variable. Cas d'une densité de probabilité. Quelques lois continues classiques et ce qu'elles modélisent. Interprétation graphique d'une probabilité en terme d'aire. Quelques calculs d'intégrales.
- La fonction de répartition. Calcul de probabilités à l'aide des fonctions de répartition. Définition d'un quantile, d'une médiane, d'un quartile. Représentation graphique à partir de la fonction de répartition. Cas gaussien (table statistique).
- Espérance, variance d'une variable aléatoire. Interprétation. Calculs élémentaires. Loi symétrique et dissymétrique (différence entre médiane et espérance)

Partie II : Statistique Descriptive et lien avec les probabilités.

- Notion de variables aléatoires i.i.d. tirées suivant une loi continue. La moyenne empirique, la variance empirique, la médiane empirique, les quartiles empiriques. Représentation par des boîtes à moustache.

- Lien entre les notions empiriques et les lois de probabilités : loi des grands nombres, convergence de la variance empirique. Notion d'estimateurs. Illustration des résultats à partir de simulations. Prévoir une animation.
- Construction d'un histogramme. Lien avec la densité de probabilité des observations. Prévoir une animation.
- Animation illustrant le théorème de la limite centrale (avec variance estimée). Notion d'intervalle de confiance (asymptotique) sur l'espérance d'un échantillon.

1.2 UE M.S1.1 : Fondements Mathématiques 1

Responsables : Philippe Maisonobe (partie algèbre) et Emmanuel Militon (partie analyse)

- Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles : graphe, parité, imparité, périodicité, composée, monotonie, fonctions minorées, majorées, bornées, rappel sur les fonctions cos, sin, exp, ln, puissances (1,5 cours)
- Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. En se bornant à une approche intuitive et sans démonstration, limite d'une fonction en un point ou en $+\infty$ ou $-\infty$, opération sur les limites, stabilité des inégalités, croissances comparées, asymptotes verticales et horizontales. Continuité, opérations sur les fonctions continues, valeurs intermédiaires, image continue d'un intervalle, théorème des bornes (1,5 cours)
- Dérivabilité, opérations sur les dérivées, extrema, Rolle, accroissements finis, variations ; étude d'une fonction (2 cours)
- Fonctions injectives, surjectives, bijectives, bijection réciproque. Continuité de la bijection réciproque d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles (admis), dérivabilité et dérivation de la bijection réciproque. Fonctions arccos, arcsin, tan et arctan (1 cours)

- Résolution de systèmes d'équations linéaires (n, p) (n équations et p inconnues, avec $n =$ ou $\neq p$), méthode du pivot de Gauss, rang (2 cours)
- Calcul matriciel : somme, produit, transposée, inverse, déterminant (2×2 et 3×3) et interprétation géométrique, effets d'opérations élémentaires sur le déterminant, Cramer (2 cours)

1.3 UE M.S1.2 : Compléments Mathématiques 1

Responsable : Christophe Cazanave

- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: division euclidienne (dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$), nombres premiers, pgcd, Bezout, algorithme d'Euclide, Gauss, congruences en $\mathbb{Z}$, calcul modulaire, coefficients binomiaux, binôme de Newton (2 cours)
- Polynômes (règles élémentaires de calcul, division euclidienne, racines), énoncé du théorème de d'Alembert, polynômes irréductibles en $\mathbb{C}[x]$ et en $\mathbb{R}[x]$, factorisation sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, racines n-ièmes de l'unité (2 cours)

- Propriétés des nombres réels (majorant, minorant, borne supérieure, borne inferieure), densité sur $\mathbb{R}$, irrationalité ($\sqrt{2}, \pi$), propriétés topologiques, partie entière (1 cours)
- Suites (*formelle : avec* ϵ, convergence de suites, limites, opérations sur les limites, suites monotones, adjacentes, limites infinies, suites récurrentes, suites extraites, Bolzano-Weierstrass) (2 cours)

- Compléments sur les limites/la continuité des fonctions d'une variable réelle : caractérisation séquentielle des limites /de la continuité, TVI et image continue d'un segment (avec démonstration) (2 cours)

1.4 UE MM.S1 : Méthodes mathématiques 1 : Maths continues 1 : Analyse en une et en plusieurs variables réelles (Portail A)

Responsable : Yves d'Angelo

- Fonctions élémentaires, fonctions trigonométriques, fonction exponentielle, fonction logarithmique
- Fonctions en une variable réelle : continuité, dérivabilité; étude des graphes, extrema, développements limités à l'ordre 1 ou 2
- Fonctions réelles en plusieurs (= 2, voire 3) variables
- Dérivées partielles, plan tangent et approximation affine, extrema libres
- Equations différentielles : séparation des variables et équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ordre 1, ordre 2 à coefficients constants
- Notions sur l'intégration et Introduction aux suites

2 Semestre 2

2.1 UE M.S2.1 : Fondements Mathématiques 2

Responsables : Julie Déserti (partie analyse) et Philippe Maisonobe (partie algèbre)

- Espaces vectoriels (vocab, structure d'ev., comb. lin., ss-ev.) et applications linéaires (Noyau, Image, rang) (cadre général et dans $\mathbb{R}^n$ en particulier) (6 cours pour l'algèbre linéaire)
- Familles de vecteurs (génératrices, libres, bases, dimension finie) + droites et plans dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- Exemples d'espaces vectoriels (polynômes, fonctions, suites). Somme directe de sous espaces vectoriels. Suites récurrences linéaires d'ordre n
- Applications linéaires en dim finie et matrices (écriture matricielle, composition, matrice de passage, formule de changements de bases)

- Calcul intégral (intégrales par parties, changement de variables), intégration et dérivation, primitives (des fonctions élémentaires), formule de Taylor (2 cours)
- Équivalents et notations de Landau. Développements limités et application au calcul de limites (2 cours)

2.2 UE M.S2.2 : Compléments Mathématiques 2

Responsable : Antoine Douai

- Rappels : fonctions logarithmes et équations fonctionnelles, fonctions exponentielles et équations fonctionnelles. Equations différentielles linéaires du 1er ordre. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (3 cours)

- Construction de l'intégrale de Riemann, sommes de Riemann (2 cours)
- Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles et intégration des fractions rationnelles (1 cours)

- Géométrie vectorielle euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ (norme, distance, produit scalaire, propriétés (Pythagore, Cauchy-Schwarz...), orthogonalité, base orthonormée, Gram-Schmidt, produit vectoriel (lien avec le déterminant)) (3 cours)
- Projections et symétries orthogonales, matrice de projection, décomposition de l'espace en sous-espaces vectoriels orthogonaux (1 cours)

2.3 UE MM.S2 : Méthodes Mathématiques 2 : Approche discrète

Responsable : Mohamed Elkadi

- Systèmes d'équations linéaires : Systèmes linéaires, interprétation géométrique en dimension 2 et 3. Matrices associées aux systèmes linéaires, transformations élémentaires, algorithme de Gauss.
- Noyau d'une matrice, image d'une matrice, rang d'une matrice, théorème du rang.
- Vecteurs de $\mathbb{R}^n$, combinaison linéaire de vecteurs, dépendance linéaire, famille libre, famille génératrice, sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs, bases d'un sous-espace vectoriel, dimension.
- Opérations algébriques sur les matrices, matrices inversibles, systèmes inversibles, déterminants de matrices de taille 2, 3.
- Diagonalisation de matrices et applications : Vecteur propre, valeur propre, espace propre, polynôme caractéristique. Diagonalisation. Systèmes différentielles et systèmes de suites.
- Produit scalaire : orthogonalité, base orthonormée, Gram-Schmidt, matrice orthogonale, diagonalisation de matrices symétriques.

3 Semestre 3

3.1 UE M.S3.1 : Fondements Mathématiques 3

- Déterminant d'une matrice (développement ligne/colonne) et d'un endomorphisme. Matrice inversible. (1 cours)
- (Calcul matriciel par blocs (en TD))
- Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, polynôme caractéristique (1 cours)
- Diagonalisation, applications (puissance d'une matrice diagonalisable, application aux suites récurrentes linéaires, systèmes dynamiques linéaires discrets, systèmes différentiels) (2 cours)
- Espaces Euclidiens (en particulier $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire canonique) : matrices orthogonales et lien avec les bases orthonormées (1 cours)
- Diagonalisation des matrices symétriques réelles (1 cours)
- Classificaton des matrices orthogonales réelles en dimension 2 et 3 (en TD)

- Intégrale généralisée (thm de comparaison dans le cas des fonctions positives, absolue convergence, critères de cv) (2 cours)
- Séries numériques, comparaison séries-intégrales. Convergence absolue (2 cours)

3.2 UE M.S3.2 : Compléments d'analyse

- Espaces vectoriels normés de dimension finie, ouvert, fermé, voisinage, adhérence/intérieur d'un ensemble
- Continuité, continuité uniforme, applications linéaires continues, thm de Heine.
- Complétude, Compacité, Connexité par arcs. (8 cours pour les 3 items)
- Thm du point fixe. (1,5 cours)
- Arcs paramétrés : étude des arcs paramétrés en cartésien et en polaire, points singuliers, position par rapport à la tangente, points d'inflexion, asymptotes. (2,5 cours)

3.3 UE M.S3.3 : Compléments d'algèbre

I. Introduction aux structures algébriques et applications à l'arithmétique :

- Groupes : définition, exemples de groupes abéliens et de groupes non abéliens (comme le groupe des permutations), sous-groupes, (iso)morphismes de groupes, sous-groupes engendrés par un ensemble, ordre d'un élément, thm de Lagrange, groupes cycliques (2,5 cours)
- Anneaux et corps : définitions, exemples d'anneaux, sous-anneaux, multiple, diviseur, élément inversible, corps, anneaux intègres, (iso)morphismes d'anneaux, rappels sur les congruences (vu en M.S1.2), définition de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (via classes résiduelles), le corps $\mathbb{F}_p$, théorème des restes chinois (1,5 cours)
- Applications à l'arithmétique : Thm de Fermat, fonction d'Euler, thm d'Euler, systèmes de congruences, cryptographie et équations diophantiennes (méthode réduction modulo p, méthode de la descente infinie de Fermat) (1 cours)

II. Formes multilinéaires et Algèbre bilinéaire :

- Groupe symétrique, formes multilinéaires, déterminant (2 cours)
- Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques réelles (méthode d'élimination de variables de Gauss, écriture matricielle, signature, théorème de Sylvester). Espaces hermitiens ($\mathbb{C}^n$ avec produit scalaire standard), classification des formes hermitiennes (3 cours)

3.4 UE MM.S3.1 : Méthodes Mathématiques 3-1 : Modélisation géométrique

- Espaces vectoriels, applications linéaires
- Formes quadratiques, Lagrange, définies positive et négative
- Normes, distance, produit scalaire
- Méthode des moindres carrés, projection orthogonale, matrice de projection
- Orthogonalisation Gramm-Schmidt

- Décomposition de l'espace en sous-espaces vectoriels orthogonaux
- Décomposition en valeurs singulières
- Régression (MCO, ACP)

3.5 UE MM.S3.2 : Méthodes Mathématiques 3-2 : Mathématiques et ingénierie

- Calcul diff : Fonctions de plusieurs variables, continuité, dérivées partielles (introduction au gradient, formule de Taylor, différentielle, opérateurs différentiels)
- EDO et introduction aux EDP
- Intégrales simples et introduction aux intégrales multiples
- Introduction aux théorèmes de l'analyse vectorielle
- Introduction aux séries de Fourier
- Transformée de Laplace,

4 Semestre 4

4.1 UE M.S4.1 : Analyse

- Suites et séries de fonctions (2 cours)
- Séries entières (rayon de convergence, dérivation et intégration terme à terme d'une série entière) (2 cours)
- Séries de Fourier (thm d'unicité, thm de cv de Dirichlet, év. thm de Cesaro, éventuellement approximation uniforme par des polynômes trigonométriques) (2 cours)
- Calcul diff : Fonctions de plusieurs (2 ou 3) variables et à valeurs réelles (continuité, dérivées partielles, différentiabilité, gradient, Hessienne, formule de Taylor, matrice jacobienne, fonctions composées, extréma, év. thm des extrema liés). (6 cours)

4.2 UE M.S4.2 : Probabilités et introduction à la statistique

INTRODUCTION AUX PROBABILITES

- Notion d'événements aléatoires. Dénombrement (pas fait avant !). Lien entre probabilité et fréquence d'un événement.
- Notion de variables aléatoires discrètes et de lois discrètes. Exemples des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson et ce que ces lois modélisent : du jeu pile ou face (truqué et non truqué), jeu de dé (truqué et non truqué), événements rares. Formules (admises) de calcul (simple) de probabilités et d'espérance (formule de transfert), d'espérances et de variances, pour des variables aléatoires discrètes.
- Notion de densité de probabilité. Exemple de la loi uniforme, exponentielle, gaussienne et ce que ces lois modélisent : tirage aléatoire uniforme, durée de vie, erreurs de mesures. Formule (admise) de calcul de probabilité, d'espérance (formule de transfert), de variance, avec des lois à densité.
- Inégalités de Bienaymé-Tchebycheff et Markov.

INTRODUCTION AUX STATISTIQUES

- Notion de fonction de répartition et de fonction quantile. Interprétation et calculs.
- Indicateurs statistiques : paramètres de tendance centrale, de dispersion et de position (moyenne médiane, variance, mode...)
- Statistiques descriptives : diagramme en bâtons, histogramme et courbe des fréquences cumulées.
- Introduction à l'indépendance d'événements et de variables aléatoires. Formule de Bayes sur deux événements et son interprétation. Notion de covariance entre variables aléatoires. (on ne parlera pas de loi jointe)
- Théorème limites (sans preuve) : loi des grands nombres, théorème centrale limite. Intervalles de confiance.

4.3 UE M.S4.3 : Algèbre

I. Théorie des groupes :

- Relation d'équivalence et ensemble quotient, classes modulo un sous-groupe, sous-groupes distingués, groupes quotients, sous-groupes de groupes cycliques et leurs quotients, thm d'isomorphisme pour les groupes, énoncé de la structure des groupes abéliens finis (3 cours)

II. Algèbre commutative :

- Généralités sur les anneaux commutatifs : idéaux, anneaux quotients, idéal engendré par un ensemble, idéaux principaux, idéaux maximaux, idéaux premiers (1,5 cours)
- Divisibilité dans les anneaux (pgcd, éléments associés), anneaux principaux (pgcd, Bezout, Gauss) (0,5 cours)
- Anneaux de polynômes : division Euclidienne, idéaux de $K[x]$, l'anneau quotient $K[x]/(f(x))$ (0,5 cours)
- Eléments algébriques, éléments transcendants, polynôme minimal (0,5 cours)

III. Réduction des endomorphismes :

- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables, Trigonalisation de matrices, polynômes d'endomorphismes, Cayley-Hamilton, lemme des noyaux, sous-espaces caractéristiques, décomposition selon les espaces caractéristiques, Dunford, Jordan (6 cours)
- (Si le temps le permet, faire une introduction aux actions de groupes et donner plusieurs exemples en lien avec la réduction des endomorphismes.)

4.4 UE M.S4.4 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires et non-linéaires

Le but de cette unité d'enseignement est de familiariser les étudiants avec les méthodes de base du calcul numérique et de la simulation numérique. Chaque concept abordé sera motivé par un exemple concret tiré de la vie de tous les jours. Ce sera également l'occasion de faire le point sur le lien des mathématiques et leurs applications. Des illustrations numériques sur *Python* sont également proposées pour mettre en œuvre les algorithmes étudiés.

- Outils de base : normes vectorielles et normes matricielles ; relation entre rayon spectral et normes matricielles ; localisations des valeurs propres : théorème de Hadamard-Gerschgorin ; suites de vecteurs et de matrices ; conditionnement d'un système linéaire. (2 cours)

- Approximation de solutions des équations : exemple de problème concret d'illustration de la question. Méthode de dichotomie. Théorème du point fixe ; méthode de Newton en dimensions 1, et $n > 1$; estimation de l'erreur d'approximation, ordre de convergence. (2,5 cours)

- Résolution numérique des systèmes linéaires : exemple de problème réel d'illustration de la situation. Méthodes directes : étude numérique, calcul du nombre d'opérations et stabilité des algorithmes d'élimination de Gauss, de décomposition LU ; aspects algorithmiques du problème des moindres carrés discrets et de décomposition en valeurs singulières SVD. Méthodes itératives : étude théorique, numérique, calcul du nombre d'opérations et estimation d'erreurs d'approximation des algorithmes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Méthode du gradient à pas constant. Applications de ces algorithmes à l'exemple de la matrice du Laplacien. (4,5 cours)

- Calcul approché de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice : exemple de problème concret d'illustration de la question. Algorithmes de base d'approximation des éléments propres d'une matrice : étude théorique, numérique, calcul du nombre d'opérations et estimation d'erreurs d'approximation des méthodes de la puissance itérée, de la puissance inverse, présentation succincte de la méthode QR pour le calcul approché simultané de toutes les valeurs propres. (3 cours)

4.5 UE M.S4.2D : Géométrie

Sous construction.
Responsable à l'ESPE :
Responsable au LJAD :

4.6 UE MM.S4.1 : Méthodes Mathématiques 4 : Modélisation aléatoire

Ce module sera une introduction aux probabilités et aux statistiques avec des exemples pour illustrer les différentes notions abordées.

- INTRODUCTION AUX PROBABILITES :
  - Dénombrement
  - Définition des probabilités finies, probabilités conditionnelles finies, indépendance :

    Notion d'événements aléatoires. Lien entre probabilité et fréquence d'un événement. Introduction à l'indépendance d'événements. Formule de Bayes sur deux événements A et B : $P(A|B) = P(A \cap B)/P(A)$ et son interprétation.
    Illustration de l'intérêt de l'indépendance dans certains calculs.
  - Rappels sur les séries
  - Probabilités sur des espaces dénombrables (généralités)

— Variables aléatoires discrètes (définition, lois classiques, espérance, formule de transfert, variance) :

Notion de variables aléatoires discrètes et de lois discrètes.
Exemples des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson et ce que ces lois modélisent : du jeu pile ou face (truqué et non truqué), jeu de dé (truqué et non truqué), événements rares. Formules (admises) de calcul (simple) de probabilités et d'espérance (formule de transfert), d'espérances et de variances, pour des variables aléatoires discrètes.

— Variables aléatoires à densité (définition, lois classiques, fonction de répartition, espérance, variance) :

Notion de densité de probabilité. Exemple de la loi uniforme, exponentielle, gaussienne et ce que ces lois modélisent : tirage aléatoire uniforme, durée de vie, erreurs de mesures.
Notion de fonction de répartition et de fonction quantile. Notion de médiane, quartile, décile.
Formule (admise) de calcul de probabilité, d'espérance (formule de transfert), de variance, avec des lois à densité. Interprétation.

- INTRODUCTION AUX STATISTIQUES :
  — Statistiques descriptives : diagramme en bâtons et histogramme et courbe des fréquences cumulées.
  — Indicateurs statistiques : paramètres de tendance centrale, de dispersion et de position (moyenne médiane, variance, mode). Interprétation et représentation.
  — Introduction à la fluctuation d'échantillonage et ouverture vers l'intérêt d'un intervalle de confiance.
  — Introduction à l'indépendance pour les variables aléatoires et théorème limites (sans preuve) : loi des grands nombres, théorème centrale limite

4.7 UE MM.S4.2 : Mathématiques pour la finance

ECUE MM.S4.2.1 : Mathématiques financières

- Compléments sur les suites numériques ;
- Taux d'imposition (fiscalité) ;
- Taux d'intérêts composés, taux continus ;
- Versements périodiques, formule des annuités ;
- Amortissement d'un emprunt ;
- Valeur des obligations ;
- Introduction aux produits dérivés.

ECUE MM.S4.2.2 : Analyse de la décision

- Outils mathématiques préliminaires : Théorie naive des ensembles, Eléments de logique et méthodes de preuve ;
- Les fondamentaux de la théorie du choix : Le statut du choix en sciences économiques, les relations binaires, les relations de préférences ;

- La théorie des préférences révélées : Relations de préférences et choix ; Choix et préférences révélées (axiomes alpha et beta de Sen, axiome d'Houthakker) ;
- L'utilité ordinale : Homomorphismes et isomorphismes d'ordre ; Représentation des relations de préférences par une fonction d'utilité ; Non-unicité des fonctions d'utilité ; Fonction d'utilité et courbe d'indifférence ; Propriétés structurelles des relations de préférences (continuité, monotonie, non-satiabilité, convexité, homothétie).

5 Semestre 5

5.1 UE M.S5.1 : Calcul différentiel et géométrie différentielle

- Calcul différentiel sur un espace vectoriel normé de dimension finie.
- Courbes, surfaces et volumes paramétrés. Vecteurs et plans tangents.
- Fonctions $\mathcal{C}^k$, inversion locale, fonctions implicites.
- Graphes, courbes de niveau.
- Introduction à la géométrie différentielle : courbes et surfaces, multiplicateurs de Lagrange.
- Courbes et surfaces (courbure, torsion), év. thm de Gauss sur la courbure totale.

5.2 UE M.S5.2 : Statistique et modélisation

Ce module a pour objectif d'introduire les notions d'estimation et de tests avec la mise en oeuvre sur les problèmes de régression linéaire.

- Indépendance et la notion de vecteurs aléatoires
- Estimation
  — estimation ponctuelle avec la méthode des moments et du maximum de vraisemblance
  — les propriétés d'un estimateur : sans biais, convergent, erreur quadratique
  — intervalle de confiance dans le cadre gaussien et non gaussien quand cela est possible (illustration de la notion de niveau de confiance à l'aide de l'outil informatique)
- Régression
  — rappel de ce qu'est le problème de régression avec des exemples concrets
  — estimation des paramètres
  — intervalle de confiance pour les paramètres, pour la droite de régression et pour les prédictions (illustration informatique dans le cadre de la régression linéaire simple)
- Tests
  — définition du principe d'un test
  — test classique sur un paramètre et sur un couple de paramètres (l'idée est de montrer la forme elliptique de la région de confiance)
  — test d'adéquation (χ^2 et Kolmogorov)
  — test d'indépendance (χ^2)
- Retour sur la régression
  Cette partie comportera une interprétation des résultats de sortie du logiciel R.
  — test individuel sur un paramètre avec le côté interprétation
  — test global de Fisher
  — test de modèles gaussiens emboîtés avec l'utilisation pour un aspect sélection de variables.
  — validation des hypothèses classiques du modèle de régression linéaire

5.3 UE M.S5.3 : Intégration et théorie de la mesure

- Rappels sur l'intégrale de Riemann et calculs d'intégrales
- Dénombrabilité
- Théorie de la mesure - mesures de Lebesgue et de comptage
- Fonctions mesurables et intégration
- Théorèmes limites
- Intégrales multiples
- Intégrales à paramètres, transformée de Fourier (introduction)
- Ev. espace L^1

5.4 UE M.S5.4 : Equations différentielles

ECUE M.S5.4.1 : Equations différentielles I

- Rappels sur les équations différentielles d'ordre 1 (1 cours)
- Systèmes différentiels / équations différentielles linéaires à coefficients constants / exponentielle des matrices (2 cours)
- Portraits de phase des systèmes linéaires dans le plan (1,5 cours)
- Équations différentielles non-linéaires, théorème de Cauchy-Lipschitz et solutions maximales, variables séparables (3 cours)

ECUE M.S5.4.2 : Equations différentielles II

- Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables, wronskien, variation de la constante, etc. (1,5 cours)
- Lien avec les séries entières (1 cours)
- Théorème des bouts, lemme de Gronwall (2 cours)

5.5 UE M.S5.5 : Algèbre et géométrie

I. Dualité linéaire :

- Formes linéaires, hyperplans, espace dual, base dual, bidual, orthogonal linéaire (1,5 cours)

II. Réduction des endomorphismes autoadjoints :

- Espaces hermitiens : formes hermitiennes, produit scalaire hermitien, réduction de Gauss, matrices hermitiennes, changement de base, bases orthonormées, orthogonal (1,5 cours)
- Endomorphismes autoadjoints sur un espace Euclidien/hermitien et diagonalisation, réduction des endomorphismes normaux (2 cours)
- Groupes orthogonaux et unitaires, relations entre $U(2, \mathbb{C})$, $SO(3, \mathbb{R})$ et les quaternions, décomposition d'une transformation orthogonale en produit de réflexions (2 cours)

III. Applications :

- Application : Décomposition polaire (1 cours)
- Applications en TP : Décomposition LU, factorisation de Cholesky, factorisation QR, moindres carrés discrets, décomposition en valeurs singulières avec application ACP

IV. Géométrie affine :

- Espace affine et sa direction, applications affines, repères affines, coordonnées barycentriques, convexité (2 cours)
- Similitudes affines, Classification des isométries affines en dimension 2 et 3 (1 cours)
- Géométrie plane : théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues (1 cours)

5.6 UE M.S5.2D : Nombres

Sous construction.
Responsable à l'ESPE :
Responsable au LJAD :

5.7 UE MM.S5.1 : Analyse économétrique

ECUE MM.S5.1.1 : Econométrie appliquée

- Ajustement par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) : le modèle linéaire simple ; Approche analytique : le système des équations normales, Les propriétés des MCO, Interprétation géométrique ; Mesure explicative du modèle : Equation d'Analyse de la Variance, Le coefficient de détermination (R2 et R2 ajusté ; leur interprétation géométrique) et le coefficient de corrélation ; Le modèle linéaire général (multiple) : écriture matricielle ; Estimation des paramètres par les MCO (système des équations normales, interprétation géométrique de la méthode : le passage en variables centrées) ; Note sur la multicolinéarité : Notions de corrélations simple, partielle et multiple.
- Introduction des probabilités dans le modèle : l'interprétation probabiliste des MCO : les sept hypothèses ; étude des propriétés des estimateurs (sans biais, convergents et efficaces) ; Détermination de l'expression de la variance des estimateurs.
- Application de la théorie des Tests au modèle linaire Tests sur la valeur d'un coefficient : le test de Student : test de significativité d'un coefficient, test sur la valeur d'un coefficient par rapport à une valeur particulière, test d'une restriction linéaire sur les coefficients (Student) ; Test de signification globale du modèle par l'équation d'Analyse de la variance (justification et construction de la statistique de Fisher).

ECUE MM.S5.1.2 : Introduction aux séries temporelles
Responsable : A. Tykhonenko

- Définition d'une série chronologique univariée et les problèmes spécifiques posés par les séries temporelles (identification, prévision, stationnarité, tendance et saisonnalité, séparation du court et du long terme) ; Analyses temporelle et spectrale ; La 'galerie de portraits' : processus stationnaires AR, MA et ARMA ; processus non-stationnaires ARIMA et SARIMA ; Méthode (itérative) de Box et Jenkins.
- Concepts, notations et notions de base : processus aléatoire/stochastique ; stationnarité 'forte' (au sens strict), stationnarité à l'ordre 2 et Bruit Blanc ; non-Stationnarité (TS et DS) et Marche aléatoire ; Opérateur retard et ses propriétés ; FAC/FAP ; Fonction d'Autocovariance d'un Processus, Corrélogramme (théorique et empirique) ; Tests de significativité des coefficients d'autocorrélation.
- Typologie des modèles stationnaires : MA, AR et ARMA (formulation et caractéristiques FAC/FAP) : Synthèse des propriétés (les outils permettant d'identifier le modèle générateur).
- Modèles Non-Stationnaires : Conditions de Stationnarité et d'Inversibilité ; Description des Processus TS et DS ; Différentiation et Conséquences d'une 'Mauvaise' Stationnarisation du Processus.
- Exemples : Exemple d'analyse : application à l'indice boursier CAC40 ; Analyse des corrélogrammes : MA, AR, ARMA, SARMA et ARIMA (stationnarité vs non-stationnarité).

5.8 UE MM.S5.2 : Systèmes dynamiques, calcul différentiel et optimisation

ECUE MM.S5.2.1 : Systèmes dynamiques et calcul différentiel

- Calcul différentiel : Fonctions de plusieurs variables (continuité, dérivées partielles, gradient, Hessienne, formule de Taylor, matrice jacobienne, fonctions composées, extréma). La notion de différentielle ne sera pas introduite. (3,5 cours)
- Théorie des équations differentielles ordinaires (2,5 cours) :
  - Equations scalaires linéaires d'ordre 1 (méthode de la variation de la constante).
  - Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre n à coefficients constants.
  - Cas général. Exemples d'équations différentielles non-linéaires ; mise sous forme ordre 1 dans le cas général. On évoquera le théorème de Cauchy-Lipschitz (sans preuve).
  - Cas des équations différentielles à variables séparables.
- Approximation numérique des équations différentielles ordinaires : (2 cours).
  - Mise en forme des schémas numériques d'Euler explicite et implicite, Crank Nicolson, RK4 ; Notion de schémas explicite/implicite et problématique de résolution associées dans le cas implicite, schéma à un pas.
  - Notion de convergence de schémas numériques et ordre de convergence. Etude sur un exemple : convergence du schéma d'Euler explicite.
  - Cadre général : Notion de consistance, stabilité et ordre, théorème de convergence des schémas à un pas (sans preuve).
  - Discussion sur la stabilité, exemples sur les systèmes linéaires. Notion de raideur.

ECUE MM.S5.2.2 : Optimisation

- Optimisation : (4 cours)
  - Optimisation des fonctions différentiables sans contrainte.
  - Optimisation sous contrainte : Lagrangien, multiplicateurs de Lagrange, optimisation avec contrainte d'égalité, avec contrainte d'inégalité.
  - Optimisation des fonctions convexes.

6 Semestre 6

6.1 UE M.S6.1 : Probabilités et ses applications

- Espace de probabilité, définition des variables aléatoires. Lien avec la théorie de la mesure. Loi d'une variable aléatoire en tant que mesure image. Théorème de transfert.
- Notion de densité de probabilité par rapport à une mesure dominante. Rappels de lois classiques et de leur densité.
- Espérance, variance. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev et Markov. Espaces L^1 et L^2. Inégalité de Jensen et de Holder.
- Notion de fonction de répartition, fonction quantile, fonction génératrice, caractéristique.
- Simulation de v.a. par inversion de la fonction de répartition.
- Indépendance d'événements, de tribus et de variables aléatoires.
- Calculs de loi (couple, marginale, somme de variables aléatoire,...)
- Convergence de variables aléatoires (p.s., en probabilité, en loi). Liens entre ces convergences.
- Les grands théorèmes limites (loi des grands nombres, théorème central limite)

- Applications à l'approximation d'une intégrale par la méthode de Monte-Carlo
- Introduction à la statistique

6.2 UE M.S6.2 : Algèbre et algèbre effective

- Groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ (notamment $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ cyclique). Carrés de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; symbole de Legendre ; de Jacobi. Enoncé de la loi de réciprocité quadratique. Tests de primalité (Fermat, Rabin-Miller, Solovay-Strassen...). Algorithmes de factorisation (Gauss, Pollard,...). Application à RSA. (2.5 cours)
- Représentation des groupes abéliens finis. Lemme d'extension des caractères. Th de structure. Transformée de Fourier discrète. Multiplication rapide. (1.5 cours)
- Polynômes : critères d'irréductibilité d'Eisenstein et de réduction modulo p. Polynômes cyclotomiques. Irréductibilité sur $\mathbb{Q}$. (2.5 cours)
- Extensions de corps. Corps de rupture et corps de décomposition. Clôture algébrique. Caractéristique d'un corps. Corps finis : existence et unicité. Algorithme de factorisation dans $\mathbb{F}_p[X]$ (Berlekamp). (2.5 cours)
- Démonstration de la loi de réciprocité quadratique (avec sommes de Gauss dans $\mathbb{F}_p$). (1 cours)
- Codes correcteurs d'erreur : Distance de Hamming, distance minimale d'un code linéaire. Codes de répétition, codes de Hamming binaires. (2 cours)

6.3 UE M.S6.3 : Introduction à l'analyse fonctionnelle

- Topologie des espaces métriques, exemples. Ouverts, fermés, adhérence, intérieur. Applications continues (images réciproques) et uniformément continues, théorème de Heine, homéomorphismes. Distance à une partie. Compacité (image continue, propriété de Borel-Lebesgue). Partie dense. Connexité (passage du local au global). Cas des espaces vectoriels normés généraux (dimension quelconque), applications linéaires continues.
- Espaces de Banach, convergence absolue, application : exponentielle de matrice, théorème du point fixe de Banach, application : théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Inégalités (Jensen, Hölder, Minkowski), espaces ℓ^p et L^p. Continuité des translations. Convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$: cas $L^1 * L^p$ et $L^p * L^q$ avec p, q conjugués. Densité des fonctions continues à support compact (mesure de Lebesgue). Théorème de Riesz-Fischer.
- Transformée de Fourier sur L^1.
- Approximation uniforme (théorème de Weierstrass et de Weierstrass trigonométrique).

6.4 UE M.S6.4 : Approximation numérique des fonctions, des intégrales et des équations différentielles ordinaires

Le but de cette unité d'enseignement est de consolider et d'élargir les acquis des étudiants sur les méthodes de base du calcul numérique et de la simulation numérique. Chaque concept abordé sera motivé par un exemple concret tiré de la vie courante. Cette unité sera également l'occasion de faire le point sur le lien des mathématiques et leurs applications. Des illustrations numériques sur *Python* sont proposées pour mettre en œuvre les algorithmes étudiés.

- Approximation des fonctions d'une variable réelle : exemple de problème concret d'illustration de la question. Erreur de meilleure approximation ; approximation par les séries trigonométriques : transformations de Fourier discrète et rapide ; interpolation polynomiale : représentations de Lagrange et de Newton, erreur d'interpolation polynomiale, stabilité d'interpolation polynomiale ; interpolation polynomiale par morceaux : Lagrange par morceaux ; approximation par moindres carrés continus et discrets : erreur d'approximation évaluée dans la norme L^2. (4 cours)

- Calcul approché des intégrales : exemple de problème concret d'illustration de la situation. Formules d'intégrations simples et composées ; erreur d'intégration : notion d'ordre, représentation de Peano ; quadratures de Gauss composées ; introduction à la méthode de Monte-Carlo. (3 cours)

- Approximation numérique des équations différentielles : exemple de problème concret d'illustration de la question. Méthode de différences finies : schémas d'Euler explicite et implicite, du point milieu ; étude de convergence : consistance, stabilité, convergence. Méthodes basées sur des formules d'intégration numérique : schémas d'Euler explicite et implicite, du point milieu, de Crank-Nicolson, de Runge-Kutta. Formalisation générale : méthodes à un pas, méthodes multipas, étude de convergence. Problèmes raides. (5 cours)

6.5 UE M.S6.5 : Analyse complexe

- Séries entières et fonctions analytiques
- Fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann, théorème d'holomorphie sous le signe intégral
- Intégrales curvilignes, primitives. Formules intégrales de Cauchy et consequences.
- Points singuliers, fonctions méromorphes
- Calcul des résidus
- Thm de l'application conforme

6.6 UE M.S6.2D : Analyse, probabilités et statistique

Sous construction.
Responsable à l'ESPE :
Responsable au LJAD :

6.7 UE MM.S6.1 : Probabilités

Chaque notion introduite doit être motivée par une fin applicative en économie, assurance, finance, biologie, physique...

- Mesures : mesures discrètes (somme de masses de Dirac) et mesures à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Exemples issus de la modélisation. Notion de tribu d'événements aléatoires comme modélisation de l'information (l'objectif final du cours est uniquement de faire comprendre la notion de tribu engendrée par des variables aléatoires ; on supposera que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un Borélien de $\mathbb{R}^n$ et on ne fera pas d'exercices théoriques sur les tribus). Ensembles négligeables. Espace de probabilité. Notion de densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue. (1 cours)

- Intégrale par rapport à une mesure (discrète ou à densité). Fonctions intégrables. On s'attachera à montrer comment un calcul d'intégrale par rapport à une mesure (discrète ou à densité) se ramène systématiquement à calculer soit une série, soit une intégrale. (1 cours)
- Variables aléatoires. Tribu engendrée par une variable aléatoire ("la tribu engendrée part la v.a. X est la classe des événements qui ne dépendent que de X comme $\{X = 2\}$, $\{2 \leq X \leq 3\}, \ldots$"). Loi d'une variable aléatoire. Rappel rapide des lois classiques (Uniforme, Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson, Exponentielle, Normale). Expliquer pour quel genre de modélisation elles interviennent. (1 cours)
- Théorème de transfert. Espérance, variance. Caractérisation de la loi par la formule de transfert. Calculs motivés par des exemples en assurance, biologie, économie ... Définition de l'espace vectoriel $\mathbb{L}^p$ (sans complétude), moments. Mentionner que $|| \cdot ||_p$ est une norme (Inégalité de Minkowski). Mentionner par exemple que si X (distribution des richesses, connectivité dans les réseaux sociaux ...) suit une loi de Pareto alors les moments élevés sont infinis : expliquer ce que cela signifie concrètement qu'une v.a. X a une variance infinie par exemple. (1,5 cours)
- Inégalités de Bienaymé-Tchebychev et Markov, Inégalité de Jensen, Hölder (Cauchy-Schwarz). On motivera l'utilisation de telles inégalités par le fait que beaucoup de probabilités ou d'espérances ne sont pas calculables et doivent donc être estimées (exemples). Extension des théorèmes limites (convergences dominée et monotone) au cadre probabiliste. (1,5 cours)
- Notion de fonction de répartition, fonction quantile, fonction génératrice, caractéristique. Application en dynamique des populations (calculs). Simulation de v.a. par inversion de la fonction de répartition. Caractérisation de la loi par fonction de répartition ou fonction caractéristique. (1,5 cours)
- Indépendance d'événements, de tribus et de variables aléatoires. Pour les tribus, on se contentera de tribus engendrées par des variables aléatoires. Caractérisation de l'indépendance via la densité, poids, fonctions caractéristiques ... Exercices d'applications en assurance, files d'attentes, finance, biologie, réseaux sociaux ... (1,5 cours)
- Calculs de loi (couple, marginale, somme de variables aléatoire,...) (1 cours)
- Convergence de variables aléatoires (p.s., en probabilité, en loi). Liens entre ces convergences. (1 cours)
- Les grands théorèmes limites (loi des grands nombres, théorème central limite). Intervalles de confiance (estimation). Applications à l'approximation d'une intégrale par la méthode de Monte-Carlo. (1 cours)

6.8 UE MM.S6.2 : Suites de fonctions, calcul intégral et séries de Fourier

- Polynômes (fonction polynôme associée à un polynôme, racines, factorisations sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) - Interpolation polynomiale (existence, unicité, représentation de Lagrange, erreur d'interpolation polynomiale). (1 cours)
- Rappels sur les calculs d'intégrales en dimension 1 (IPP, formule de changement de variables). Fonctions intégrables. (1 cours)
- Intégrales multiples : théorème de Fubini, formule du changement de variables (sans preuves). Fonctions intégrables. (2 cours)

- Méthodes déterministes de calcul approché (rectangle, trapèze) pour le calcul approché d'intégrales. (1 cours)
- Espaces L^p : définition (on ne parlera pas de la complétude). On admettra que $||\cdot||_p$ est une norme. Définition de la convergence en norme L^p. (1 cours)
- Suites de fonctions : convergence uniforme et convergence simple. (1 cours)
- Théorèmes limites : théorème de convergence monotone et théorème de convergence dominée (sans preuve). Exemples. (1 cours)
- Intégrales à paramètres, transformée de Fourier : Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres (sans preuves). Définition de la transformée de Fourier pour une fonction L^1. Exemples de calculs de la transformée de Fourier (exponentielle, gaussienne, indicatrice d'intervalle ...). Lemme de Riemann-Lebesgue. Relation de Parseval pour les fonctions dans $L^1 \cap L^2$. (2,5 cours)
- Séries de Fourier : définition, calculs, Relation de Parseval. (1,5 cours)