

Offre de formation du département de Mathématique UNS

6 septembre 2018

Légende des couleurs. Les Unités d'Enseignement M pour tou-te-s sont en jaune, celles, M, orientées pour les matheux-ses sont en rouge, celles, MM, des méthodes mathématiques sont en vert, et celles d'option CAPES sont en noire.

blue

Table des matières

1	Semestre 1	1
1.1	UE M.S1.1 : Fondements Mathématiques 1	1
1.2	UE M.S1.2 : Compléments Mathématiques 1	2
1.3	UE MM.S1 : Méthodes mathématiques 1 : Maths continues 1 : Analyse en une et en plusieurs variables réelles	2
2	Semestre 2	3
2.1	UE M.S2.1 : Fondements Mathématiques 2	3
2.2	UE M.S2.2 : Compléments Mathématiques 2	3
2.3	UE MM.S2 : Méthodes Mathématiques 2 : Approche discrète	3
3	Semestre 3	4
3.1	UE M.S3.1 : Fondements Mathématiques 3	4
3.2	UE M.S3.2 : Compléments d'analyse	4
3.3	UE M.S3.3 : Compléments d'algèbre	5
3.4	UE MM.S3.1 : Méthodes Mathématiques 3-1 : Modélisation géométrique	5
3.5	UE MM.S3.2 : Méthodes Mathématiques 3-2 : Modélisation continue 2	6
4	Semestre 4	6
4.1	UE M.S4.1 : Analyse	6
4.2	UE M.S4.2 : Probabilités et introduction à la statistique	6
4.3	UE M.S4.3 : Algèbre	7
4.4	UE M.S4.4 : Méthodes numériques	7
4.5	UE MM.S4.1 : Méthodes Mathématiques 4 : Modélisation aléatoire	8
4.6	UE MM.S4.2 : Mathématiques pour l'entreprise	8

5	Semestre 5	8
5.1	UE M.S5.1 : Calcul différentiel et géométrie différentielle	8
5.2	UE M.S5.2 : Algèbre et géométrie	9
5.3	UE M.S5.3 : Intégration et théorie de la mesure	9
5.4	UE M.S5.4 : Analyse numérique	9
5.5	UE M.S5.5 : Analyse complexe	10
6	Semestre 6	10
6.1	UE M.S6.1 : Probabilités et ses applications	10
6.2	UE M.S6.2 : Applications de structures algébriques et algèbre effective	11
6.3	UE M.S6.3 : Analyse fonctionnelle. Topologie des espaces vectoriels normés, espace de Banach et analyse de Fourier	11
6.4	UE M.S6.4 : Equations différentielles	11
6.5	UE M.S6.5 : Statistiques, modélisation	12

Les cours sont de 2 heures.

1 Semestre 1

1.1 UE M.S1.1 : Fondements Mathématiques 1

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence Math, MIASH, doubles diplômes Math-Info et Math-Physique et une partie des étudiants du portail A de l'UFR Sciences n'envisageant de suivre qu'un bloc de mathématiques au semestre 1.

- Nombres complexes et trigonométrie (la suite de Maths 0), racines n-ièmes de l'unité (1 cours)
- Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles : graphe, parité, imparité, périodicité, composée, monotonie, fonctions minorées, majorées, bornées, rappel sur les fonctions cos, sin, exp, ln, puissances (0,5 cours)
- Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. En se bornant à une approche intuitive et sans démonstration, limite d'une fonction en un point ou en $+\infty$ ou $-\infty$, opération sur les limites, stabilité des inégalités, croissances comparées, asymptotes verticales et horizontales. Continuité, opérations sur les fonctions continues, VI, image continue d'un intervalle, théorème des bornes (1,5 cours)
- Dérivabilité, opérations sur les dérivées, extrema, Rolle, AF, variations ; étude d'une fonction (2 cours)
- Fonctions injectives, surjectives, bijectives, bijection réciproque. Continuité de la bijection réciproque d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles (admis), dérivabilité et dérivation de la bijection réciproque. Fonctions arccos, arcsin, tan et arctan (1 cours)
- Résolution de systèmes d'équations linéaires (n, p) (n équations et p inconnues, avec $n =$ ou $\neq p$), méthode du pivot de Gauss, rang (2 cours)
- Calcul matriciel : somme, produit, transposée, inverse, déterminant (2×2 et 3×3) et interprétation géométrique, effets d'opérations élémentaires sur le déterminant, Cramer (2 cours)

1.2 UE M.S1.2 : Compléments Mathématiques 1

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence Math, doubles diplômes Math-Info et Math-Physique et une partie des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre deux blocs de mathématiques au semestre 1 dont Fondements Mathématiques 1.

- Arithmétique dans \mathbb{Z} : division euclidienne (dans \mathbb{N} et dans \mathbb{Z}), nombres premiers, pgcd, Bezout, algorithme d'Euclide, Gauss, congruences en \mathbb{Z} , calcul modulaire, coefficients binomiaux, binôme de Newton (2 cours)
- Polynômes (règles élémentaires de calcul, division euclidienne, racines), énoncé du théorème de d'Alembert, polynômes irréductibles en $\mathbb{C}[x]$ et en $\mathbb{R}[x]$, factorisation sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} (2 cours)
- Propriétés des nombres réels (majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure), densité sur \mathbb{R} , irrationalité ($\sqrt{2}$, π), propriétés topologiques, partie entière (1 cours)
- Suites (formelle : avec ϵ , convergence de suites, limites, opérations sur les limites, suites monotones, adjacentes, limites infinies, suites récurrentes, suites extraites, Bolzano-Weierstrass) (2 cours)
- Compléments sur les limites/la continuité des fonctions d'une variable réelle : caractérisation séquentielle des limites /de la continuité, TVI et image continue d'un segment (avec démonstration) (2 cours)

1.3 UE MM.S1 : Méthodes mathématiques 1 : Maths continues 1 : Analyse en une et en plusieurs variables réelles

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence MIASH et une partie des étudiants du portail A de l'UFR Sciences n'envisageant qu'un bloc de mathématiques au semestre 1.

- Fonctions élémentaires, fonctions trigonométriques, fonction exponentielle, fonction logarithmique
- Fonctions en une variable réelle : continuité, dérivabilité; étude des graphes, extrema, développements limités à l'ordre 1 ou 2
- Fonctions réelles en plusieurs (= 2, voire 3) variables
- Dérivées partielles, plan tangent et approximation affine, extrema libres
- Equations différentielles : séparation des variables et équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ordre 1, ordre 2 à coefficients constants
- Notions sur l'intégration et Introduction aux suites

2 Semestre 2

2.1 UE M.S2.1 : Fondements Mathématiques 2

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence Math, MIASH, doubles diplômes Math-Info et Math-Physique et une partie des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre qu'un bloc de mathématiques au semestre 2.

- Espaces vectoriels (vocab, structure d'ev., comb. lin., ss-ev.) et applications linéaires (Noyau, Image) (cadre général et dans \mathbb{R}^n en particulier) (6 cours pour l'algèbre linéaire)

- Familles de vecteurs (génératrices, libres, bases, dimension finie) + droites et plans dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3
- Exemples d'espaces vectoriels (polynômes, fonctions, suites). Somme directe de sous espaces vectoriels. Suites récurrentes linéaires d'ordre n
- Applications linéaires en dim finie et matrices (écriture matricielle, composition, matrice de passage, formule de changements de bases)
- Calcul intégral (intégrales par parties, changement de variables), intégration et dérivation, primitives (des fonctions élémentaires), formule de Taylor (2 cours)
- Équivalents et notations de Landau. Développements limités et application au calcul de limites (2 cours)

2.2 UE M.S2.2 : Compléments Mathématiques 2

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence Math, doubles diplômes Math-Info et Math-Physique et une partie des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre deux blocs de mathématiques au semestre 2 dont Fondements Mathématiques 2.

- Rappels : fonctions logarithmes et équations fonctionnelles, fonctions exponentielles et équations fonctionnelles. Equations différentielles linéaires du 1er ordre. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (3 cours)
- Construction de l'intégrale de Riemann, sommes de Riemann (2 cours)
- Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles et intégration des fractions rationnelles (1 cours)
- Géométrie vectorielle euclidienne dans \mathbb{R}^n (norme, distance, produit scalaire, propriétés (Pythagore, Cauchy-Schwarz...), orthogonalité, base orthonormée, Gram-Schmidt, produit vectoriel (lien avec le déterminant)) (3 cours)
- Projections et symétries orthogonales, matrice de projection, décomposition de l'espace en sous-espaces vectoriels orthogonaux (1 cours)

2.3 UE MM.S2 : Méthodes Mathématiques 2 : Approche discrète

Ce cours s'adresse aux étudiants se destinant à la licence MIASH et à des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre un bloc de mathématiques au semestre 2.

- Systèmes d'équations linéaires : Systèmes linéaires, interprétation géométrique en dimension 2 et 3. Matrices associées aux systèmes linéaires, transformations élémentaires, algorithme de Gauss.
- Noyau d'une matrice, image d'une matrice, rang d'une matrice, théorème du rang.
- Vecteurs de \mathbb{R}^n , combinaison linéaire de vecteurs, dépendance linéaire, famille libre, famille génératrice, sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs, bases d'un sous-espace vectoriel, dimension.
- Opérations algébriques sur les matrices, matrices inversibles, systèmes inversibles, déterminants de matrices de taille 2, 3.

- Diagonalisation de matrices et applications : Vecteur propre, valeur propre, espace propre, polynôme caractéristique. Diagonalisation. Systèmes différentielles et systèmes de suites.
- Suites et séries numériques : Suites de nombres réels, opérations algébriques, suites arithmétiques, suites géométriques, monotonie, convergence. Suites récurrentes d'ordre p . Séries numériques, séries géométriques, série exponentielle, convergence, convergence des séries à termes positifs.

3 Semestre 3

3.1 UE M.S3.1 : Fondements Mathématiques 3

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence Math, MIASH, doubles diplômes Math-Info et Math-Physique et une partie des étudiants du portail A de l'UFR Sciences n'envisageant de suivre qu'un bloc de mathématiques au semestre 3.

- Espaces vectoriels et Euclidiens : cadre général, valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, polynôme caractéristique (2 cours)
- Déterminant d'une matrice (développement ligne/colonne) et d'un endomorphisme. Matrice inversible. Formule de Cramer (1 cours)
- (Calcul matriciel par blocs (en TD))
- Diagonalisation, applications (puissance d'une matrice diagonalisable, application aux suites récurrentes linéaires, systèmes dynamiques linéaires discrets, systèmes différentiels) (2 cours)
- Diagonalisation des matrices symétriques réelles (*sans preuve*) (0,5 cours)
- Intégrale généralisée (thm de comparaison dans le cas des fonctions positives, absolue convergence, critères de cv) (2 cours)
- Séries numériques, comparaison séries-intégrales. Convergence absolue (2 cours)
- Fonctions convexes d'une variable réelle (2 cours)
(2 cours)

3.2 UE M.S3.2 : Compléments d'analyse

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence Math, doubles diplômes Math-Info et Math-Physique et une partie des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre deux blocs de mathématiques au semestre 3.

- Espaces vectoriels normés en dimension finie, ouvert, fermé, voisinage, adhérence/intérieur d'un ensemble
- Continuité, applications linéaires continues
- Complétude, Compacité, Connexité par arcs. (8 cours pour les 3 items)
- Thm du point fixe. (1,5 cours)
- Arcs paramétrés (dont arcs paramétrés en coordonnées polaires) (2,5 cours)

3.3 UE M.S3.3 : Compléments d'algèbre

Ce cours sera suivi par des étudiants se destinant à la licence Math, au double diplôme Math-Physique, au double diplôme Math-Info (en S5 à discuter et à confirmer!!) et/ou cherchant à renforcer leur formation en mathématiques.

- Introduction aux groupes : définition, exemples de groupes abéliens et de groupes non abéliens (comme le groupe des permutations), sous-groupes, exemples d'anneaux, sous-anneaux, définition de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (via classes résiduelles), (iso)morphismes de groupes, ordre d'un élément, ordre du groupe, thm de Lagrange, groupes cycliques
- Thm de Fermat, fonction d'Euler, thm d'Euler, théorème des restes chinois, applications : crypto et équations diophantiennes (méthode réduction modulo p , méthode de descente infinie de Fermat)
- Anneaux et corps : introduction (6 cours pour les 3 items)
- Groupe symétrique, déterminant (formes multilinéaires) (2 cours)
- Diagonalisation des matrices symétriques réelles : preuve (0,5 cours)
- Trigonalisation de matrices, polynômes d'endomorphismes, Cayley-Hamilton, lemme des noyaux, polynôme minimal (sans utiliser terminologie d'idéal), lien avec les matrices diagonalisables, sous espaces caractéristiques, décomposition selon les espaces caractéristiques, Dunford, (év. Jordan). Exponentielle de matrices (3 cours)

3.4 UE MM.S3.1 : Méthodes Mathématiques 3-1 : Modélisation géométrique

Ce cours s'adresse aux étudiants se destinant à la licence MIASH et à des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre un bloc de mathématiques au semestre 3. (Le contenu proposé pourra être modifié si souhaité.)

- Espaces vectoriels, applications linéaires
- Formes quadratiques, Lagrange, positif et négatif définit
- Normes, distance, produit scalaire
- Méthode des moindres carrés, projection orthogonale, matrice de projection,
- Orthogonalisation Gram-Schmidt, décomposition QR
- Décomposition de l'espace en sous-espaces vectoriels orthogonaux
- Décomposition en valeurs singulières

3.5 UE MM.S3.2 : Méthodes Mathématiques 3-2 : Modélisation continue 2

Ce cours s'adresse aux étudiants se destinant à des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre un bloc de mathématiques au semestre 3. (Le contenu proposé pourra être modifié si souhaité.)

- Suites et séries de fonctions, conv. et div., séries de puissances, séries de Taylor
- Séries de Fourier, orthogonalité de fonctions trigonométriques
- Transformée de Fourier et intégrales de Fourier, Laplace
- Intégrales multiples, changement de variables, Jacobien

- Champs de vecteurs, divergence, rotor
- Intégrales curvilignes, théorème de Green
- Intégrales de surface, flux, théorèmes de Gauss et de Stokes

4 Semestre 4

Les étudiants des doubles parcours choisiront les cours UE M.S4.1, UE M.S4.2 et UE M.S4.4.

Les étudiants prenant le cours du continuum 2D choisiront au moins les cours UE M.S4.1, UE M.S4.2 et UE M.S4.4.

4.1 UE M.S4.1 : Analyse

- Suites et séries de fonctions (2 cours)
- Séries entières (rayon de convergence, dérivation et intégration terme à terme d'une série entière) (2 cours)
- Séries de Fourier (thm d'unicité, thm de cv de Dirichlet, approximation uniforme par des polynômes trigonométriques) (2 cours)
- Calcul diff : Fonctions de plusieurs (2 ou 3) variables (continuité, dérivées partielles, différentiabilité, gradient, Hessienne, formule de Taylor, matrice jacobienne, fonctions composées, extréma). (6 cours)

4.2 UE M.S4.2 : Probabilités et introduction à la statistique

- Notion d'événements aléatoires. Dénombrement (*pas fait avant!*). Lien entre probabilité et fréquence d'un événement.
- Notion de variables aléatoires discrètes. Exemples des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson et ce que ces lois modélisent : du jeu pile ou face (truqué et non truqué), jeu de dé (truqué et non truqué), événements rares. Formules (admises) de calcul de probabilités, d'espérances et de variances, pour des variables aléatoires discrètes.
- Notion de densité de probabilité. Exemple de la loi uniforme, exponentielle, gaussienne et ce que ces lois modélisent : tirage aléatoire uniforme, durée de vie, erreurs de mesures. Formule (admise) de calcul de probabilité, d'espérance, de variance, avec des lois à densité.
- Inégalités de Bienaymé-Tchebycheff et Markov. Notion de fonction de répartition et de fonction quantile.
- Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Notion de covariance entre variables aléatoires.
- Théorème limites (sans preuve) : loi des grands nombres, théorème centrale limite.
- (*) Introduction au point de vue de la statistique sur les phénomènes aléatoires, notion d'estimateur, intervalle de confiance, et test.

4.3 UE M.S4.3 : Algèbre

- Décomposition LU, factorisation de Cholesky, factorisation QR, moindres carrés discrets
- Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques réelles (classification en dimension 2 et 3), formes hermitiennes, thm d'inertie de Sylvester
- Applications aux coniques et quadriques (6 cours pour les 3 items)
- Suite de la théorie des groupes : Classes à gauche/droite, sous-groupes distingués, groupes quotients, sous-groupes de groupes cycliques et leurs quotients, noyau, image d'un morphisme de groupes, thm d'isomorphisme pour les groupes, énoncé de la structure des groupes abéliens finis (3 cours)
- Anneaux commutatifs, anneaux de polynômes, idéaux, idéaux principaux d'un anneau commutatif, anneau quotient (exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $K[x_1, \dots, x_n]/(f(x_1, \dots, x_n))$), divisibilité dans les anneaux (3 cours)

4.4 UE M.S4.4 : Méthodes numériques

Le but de cette unité d'enseignement est de familiariser les étudiant-e-s avec les méthodes de base du calcul numérique et de la simulation numérique. Chaque concept abordé sera motivé par un exemple concret tiré de la vie de tous les jours. Ce sera également l'occasion de faire le point sur le lien des mathématiques et leurs applications. Des illustrations numériques sur *Python* sont également proposées pour mettre en œuvre les algorithmes étudiés.

- Approximation de solutions d'équations : à ce stade les étudiants ont déjà rencontré le théorème du point et l'ont également expérimenté à plusieurs occasions. L'idée est de le présenter de façon unifiée en montrant – au-delà de la version des fonctions contractantes – ses plusieurs déclinaisons et limites (Brouwer en dimension 1 et Brouwer en dimension n à ne pas démontrer, Schauder à ne pas démontrer, théorème des valeurs intermédiaires conduisant à la méthode de dichotomie ou bisection). Exemple d'illustration de la question : illumination de la chaussée d'une route. Théorème du point fixe ; méthode de Newton et ses variantes : sécante, fausse position en dimension 1, quasi-Newton en dimension $n > 1$; analyse de méthodes de point fixe : estimation de l'erreur d'approximation, ordre de convergence ; stabilité : points fixes attractifs, répulsifs, incertains, et suivant les connaissances en Algèbre linéaire des étudiants, on démontrerait la stabilité en dimension $n > 1$.
- Résolution numérique de systèmes linéaires : Illustration du problème de la recherche de solutions de systèmes linéaires – algorithme *Pagerank* de Google. Méthode directes : étude théorique, numérique, de la complexité et de la stabilité des algorithmes d'élimination de Gauss, de décomposition LU, de factorisation de Cholesky, de factorisation QR, et des moindres carrés discrets – méthodes de l'équation normale et QR. Méthodes itératives : étude théorique, numérique, de complexité et estimation d'erreurs d'approximation des algorithmes de Jacobi, de Gauss-Seidel, de relaxation, des méthodes de descente – gradient conjugué. Applications de ces algorithmes à l'exemple de la matrice du Laplacien.
- Calcul approché de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice : illustration du problème de la recherche de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice – algorithme *Pagerank* de Google, modèles de dynamique de population structurée en âge de Leslie. Matrices positives : formes faible et forte du théorème de Perron-Frobenius énoncés, utilisés et admis. Localisations des valeurs propres : matrice et théorie des graphes – matrice d'adjacence d'un graphe, graphe associé à une matrice – irréductibilité d'une

matrice, théorème de Hadamard-Gerschogin - matrices à diagonale dominante. Relation entre rayon spectral et normes matricielles : théorème de Householder. Algorithmes de base d'approximation des éléments propres d'une matrice : étude théorique, numérique et de complexité des méthodes de la puissance itérée, de la puissance inverse, QR pour le calcul approché des valeurs propres. Conditionnement d'une matrice. Applications de ces algorithmes à l'exemple de la matrice du Laplacien.

- Représentation des nombres entiers et réels en machine et conséquences sur le calcul : problèmes d'arrondi, d'absorption, d'effacement – cancellation.

4.5 UE MM.S4.1 : Méthodes Mathématiques 4 : Modélisation aléatoire

Ce cours s'adresse aux étudiants se destinant à la licence MIASH et à des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre un bloc de mathématiques au semestre 4.

- Introduction aux probabilités et à la statistique
- Mathématiques financières

4.6 UE MM.S4.2 : Mathématiques pour l'entreprise

Ce cours s'adresse aux étudiants se destinant à la licence MIASH et à des étudiants du portail A de l'UFR Sciences envisageant de suivre un bloc de mathématiques au semestre 4.

5 Semestre 5

Pour le double parcours mathématique et informatique les U.E. à suivre seront UE M.S3.3 (à discuter et à confirmer!!), UE M.S5.3 et UE M.S5.4.

Pour le double parcours mathématique et physique les U.E. à suivre seront UE M.S5.3 et UE M.S5.5, et un cours optionnel à choisir entre UE M.S5.1 et UE M.S5.4.

Les étudiants de la licence mathématique devront suivre les cours UE M.S5.1, UE M.S5.3 et UE M.S5.2. Il devront choisir au moins un cours optionnel entre UE M.S5.5 et UE M.S5.4.

Les étudiants prenant le cours du continuum 2D choisiront au moins UE M.S5.1, UE M.S5.2 et UE M.S5.4.

5.1 UE M.S5.1 : Calcul différentiel et géométrie différentielle

- Calcul différentiel sur un espace vectoriel normé de dimension finie.
- Courbes, surfaces et volumes paramétrés. Vecteurs et plans tangents.
- Fonctions C^k , inversion locale, fonctions implicites.
- Graphes, courbes de niveau.
- Introduction à la géométrie différentielle : courbes et surfaces, multiplicateurs de Lagrange.
- Courbes et surfaces (courbure, torsion), thm de Gauss sur la courbure totale.

5.2 UE M.S5.2 : Algèbre et géométrie

- Formes linéaires, hyperplans, dualité linéaire, espace dual, base dual
- Espaces hermitiens.
- Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints d'un espace Euclidien / hermitien
- Groupes orthogonaux et unitaires (classification en dimension 2 et 3)
- Similitudes. Géométrie affine
- Isométries affines en dimension 2.
- Réduction des endomorphismes normaux. Décomposition polaire.
- Applications : Orthogonalisation simultanée de formes quadratiques, décomposition en valeurs singulières avec application ACP

5.3 UE M.S5.3 : Intégration et théorie de la mesure

- Rappels sur l'intégrale de Riemann et calculs d'intégrales
- Dénombrabilité
- Théorie de la mesure - mesures de Lebesgue et de comptage
- Fonctions mesurables et intégration
- Théorèmes limites
- Intégrales multiples
- Intégrales à paramètres, transformée de Fourier

5.4 UE M.S5.4 : Analyse numérique

Le but de cette unité d'enseignement est de consolider et d'élargir les acquis des étudiants sur les méthodes de base du calcul numérique et de la simulation numérique. Chaque concept abordé sera motivé par un exemple concret tiré de la vie courante. Cette unité sera également l'occasion de faire le point sur le lien des mathématiques et leurs applications. Des illustrations numériques sur *Python* sont proposées pour mettre en œuvre les algorithmes étudiés.

- Approximation des fonctions d'une variable réelle : exemple d'illustration de la question – restauration d'une image photographique dégradée ; erreur de meilleure approximation ; approximation par les séries trigonométriques : polynôme trigonométrique, séries de Fourier, théorème de Dirichlet, phénomène de Gibbs, théorème de Jackson, module de continuité, transformations de Fourier discrète, discrète inverse, rapide ; approximation uniforme : théorème de Weierstrass, polynômes de Bernstein ; interpolation polynomiale : existence et unicité, représentations de Lagrange et de Newton, interpolation de Hermite, erreur d'interpolation ; stabilité d'interpolation polynomiale : constante de Lebesgue, région d'analyticité, phénomène de Runge, théorème d'équi-oscillation de Tchebychev ; interpolation polynomiale par morceaux : Lagrange par morceaux ; splines : splines cubiques ; approximation par moindres carrés continus et discrets : erreur évaluée dans la norme L^2 , polynômes orthogonaux – Tchebychev, Legendre, Laguerre, Hermite.
- Calcul approché d'intégrales : exemple d'illustration de la situation – calcul d'aire de surfaces et de volumes d'objets géométriques ; formules d'intégrations simples et composées ; erreur d'intégration : représentation de Peano ; quadratures de Gauss : Tchebychev, Legendre, Laguerre, Hermite ; introduction à la méthode de Monte-Carlo.

- Approximation numérique des équations différentielles : exemple d'illustration de la question – mouvement d'un pendule. Méthode de différences finies : schémas d'Euler explicite et implicite ; étude de convergence : consistance, stabilité, convergence – théorème de Lax.

Les méthodes d'ordre élevé comme ceux de Runge-Kutta sont réservés pour les théorie et pratique de l'UE Équations différentielles la plus avancée 6.4.

5.5 UE M.S5.5 : Analyse complexe

- Séries entières et fonctions analytiques
- Fonctions holomorphes
- Intégrales curvilignes, primitives. Formules intégrales de Cauchy et conséquences.
- Points singuliers, fonctions méromorphes
- Calcul des résidus
- Thm de l'application conforme

6 Semestre 6

Pour le double parcours mathématique et informatique les U.E. à suivre seront UE M.S6.1, UE M.S6.2 et UE M.S6.5.

Pour le double parcours mathématique et physique les U.E. à suivre seront UE M.S6.1, UE M.S6.3 et UE M.S6.4.

Les étudiants de la licence maths devront suivre les cours UE M.S6.1, UE M.S6.3 et UE M.S6.4. Il devront choisir au moins un cours optionnel entre UE M.S6.2 et UE M.S6.5.

Les étudiants prenant le cours du continuum 2D choisiront au moins UE M.S6.2, UE M.S6.4 et UE M.S6.5.

6.1 UE M.S6.1 : Probabilités et ses applications

- Espace de probabilité, définition des variables aléatoires. Lien avec la théorie de la mesure. Loi d'une variable aléatoire en tant que mesure image. Théorème de transfert.
- Notion de densité de probabilité par rapport à une mesure dominante. Rappels de lois classiques et de leur densité.
- Espérance, variance. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev et Markov. Espace L1 et L2. Inégalité de Jensen et de Holder.
- Notion de fonction de répartition, fonction quantile, fonction génératrice, caractéristique.
- Simulation de v.a. par inversion de la fonction de répartition.
- Indépendance d'événements, de tribus et de variables aléatoires.
- Calculs de loi (couple, marginale, somme de variables aléatoire,...)
- Convergence de variables aléatoires (p.s., en probabilité, en loi). Liens entre ces convergences.
- Les grands théorèmes limites (loi des grands nombres, théorème central limite)
- Applications à l'approximation d'une intégrale par la méthode de Monte-Carlo
- Introduction à la statistique

6.2 UE M.S6.2 : Applications de structures algébriques et algèbre effective

- Rappels sur les idéaux
- Extensions de corps ("minimal") et corps finis, représentation sur machines des éléments d'un corps fini, calcul effectif, complexité.
- Tests de primalité
- Complexité d'algorithmes
- P versus NP
- Codes correcteurs, codes linéaires, codes BCH
- Cryptographie : DLP, RSA
- Applications à l'arithmétique : structure du groupe multiplicatif d'un corps fini, les carrés dans un corps fini, entiers sommes de deux carrés, équations de type Mordell, triplets Pythagoriciens

6.3 UE M.S6.3 : Analyse fonctionnelle. Topologie des espaces vectoriels normés, espace de Banach et analyse de Fourier

- Topologie des espaces vectoriels normés généraux, applications continues et linéaires continues
- Inégalités (Jensen, Holder, Minkowski).
- Espaces l^p et L^p .
- Transformée de Fourier.

6.4 UE M.S6.4 : Equations différentielles

- Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre 1 (méthode de la variation de la constante). Equations différentielles d'ordre 1 à variables séparables.
- Equations différentielles vectorielles linéaires d'ordre 1.
- Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre n à coefficients constants.
- Exemples de systèmes non linéaires : pendule simple, système proie/prédateur. Notion de quantité conservée, portrait de phase.
- Thm généraux d'existence, d'unicité et de prolongement des solutions, solutions maximales (Cauchy-Lipschitz).

6.5 UE M.S6.5 : Statistiques, modélisation

- Analyse de données (ACP, Analyse factorielle)
- Construction d'histogramme, lien avec la densité de probabilité
- Statistique inférentielle. Retour sur les notions d'intervalle de confiance et de test
- Test du Chi-deux.