Le Printemps Logique

Nice

Janvier 2014

Le résumé

Depuis quelques années, une connexion incontestable a été mise au jour, et intensivement explorée, entre la théorie de l'homotopie et la logique, plus précisément la théorie des types. Au coeur de cette entreprise, Vladimir Voevodsky a proposé un nouvel axiome, dit d' univalence. Cet axiome enrichit la connexion ci-dessus au point que les fans les plus inconditionnels parlent d'une révolution de la logique. Selon ces militants, au terme de cette révolution, les nouveaux ≪fondements univalents ≫ de Voevodsky supplanteraient la (bonne ?) vieille théorie des ensembles.

Le plan

- L'homotopie, une branche des maths comme les autres !
- La logique, une branche des maths comme les autres ?
- La théorie des types
- Les fondements, une situation calamiteuse
- Les preuves sur ordinateur
- Le clan des révolutionnaires
- Univalence et autres dogmes de HoTT
- La théorie synthétique de l'homotopie
- L'avenir de HoTT.

Espaces et points

En théorie de l'homotopie

il y a les espaces topologiques,
et ces espaces sont habités par des points

Exemples

les sphères.

Les espaces de chemins

Etant donnés un espace T et deux points a et b de T

il y a un nouvel espace dont les points sont les chemins de a à b dans T.

Les chemins

ça se compose, mais pas de façon associative (ou pas de façon unique).

Etant donnés un espace T, en itérant

on obtient des chemins supérieurs, qui se composent de plein de façons.

Groupe fondamental

Etant donné un espace T (de chemins ou pas) (avec un point dedans)

on définit son groupe fondamental.

Exemple

Le groupe fondamental du cercle S^1 "est" $\mathbb{Z}$.

Groupes d'homotopie

Etant donné un espace T (de chemins ou pas) (avec un point dedans)

on définit ses groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(T)$.

Exemple

On connaît certains groupes d'homotopie des sphères mais pas tous.

Omega-groupoïde fondamental

Grothendieck a eu une vision : Etant donné un espace T

tous ensemble, ses espaces de chemins itérés forment un Omega-groupoïde et les types d'homotopie sont classifiés par les Omega-groupoïdes.

On continue à travailler sur cette vision.

Autres modèles de l'homotopie

Les espaces topologiques peuvent être

très horribles, exotiques, artificiels

On sait les remplacer par les ensembles simpliciaux (par exemple)

on obtient une théorie plus ou moins équivalente, et plus algébrique.

La diversité des logiques

La logique standard a des concurrents

intuitionniste, linéaire, modale, temporelle, d'ordre supérieur, et aussi théorie des types

Plus il y en a, et mieux la logique standard se porte.

Les délices des logiciens

Les logiciens étudient et comparent ces logiques

Consistence, modèles, complétude, théorie de la démonstration, traductions

et parfois en inventent de nouvelles.

Espaces et points

En théorie des types

il y a les types,
et ces types sont habités par des termes
(qui peuvent être des types à leur tour).

Exemples

le type *nat* des entiers, habité par O
celui $nat \rightarrow nat$ des suites d'entiers, habité par l'identité.

Les espaces de chemins

Etant donnés un type T et deux termes a et b de T

il y a un nouveau type $Id_T(a, b)$ dont les termes sont les preuves d'égalité ou chemins entre a et b.

Les chemins

ça se compose, mais pas de façon associative (ou pas de façon unique).

Etant donnés un type T, en itérant

on obtient des chemins supérieurs, qui se composent de plein de façons.

Groupe fondamental

Etant donné un type T (de chemins ou pas) (avec un terme dedans)

on définit son groupe fondamental.

Exemple

Le groupe fondamental de *nat* "est trivial".

Groupes d'homotopie

Etant donné un type T (de chemins ou pas) (avec un terme dedans)

on définit ses groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(T)$.

Exemple ?

On manque de sphères !

Omega-groupoïde fondamental

Et la vision de Grothendieck ?

Etant donné un type T, tous ensemble, ses types de chemins itérés forment un Omega-groupoïde.

Dans l'autre sens, on ne voit pas grand-chose pour le moment.

Les types inductifs

Pour introduire les types "utiles" en théorie des types

on ajoute les types inductifs.

Exemple

Inductive nat : Type : =
O : nat
| S : nat $\rightarrow$ nat.

La logique, une branche pas comme les autres

En plus de ses droits et devoirs de branche des maths comme les autres la logique a une mission spécifique :

fixer et surtout faire évoluer les règles du jeu mathématique.

Malheureusement, elle n'assume pas du tout cette mission.

L'histoire des fondements au vingtième siècle

- Au début du siècle apparaissent les paradoxes de la théorie des ensembles, ce qui déclenche la crise des fondements
- Trois voies sont proposées, l'axiomatique ZF des ensembles, la logique intuitionniste, et la théorie des types.
- Hilbert et ses sbires imposent violemment la première voie
- Vers 1930 Gödel soulève les problèmes de la consistance et de l'incomplétude, mais personne ne s'en soucie
- Accessoirement il montre comment la logique intuitionniste intègre bien la logique classique, mais rien ne change
- Au milieu du siècle, Bourbaki revisite les fondements et pond sa variante de la théorie des ensembles, que personne n'adopte
- Plus tard, des propositions de fondements basés sur les catégories restent sans lendemain
- A la fin du siècle, l'informatique et les assistants de preuve mettent petit à petit en évidence les lacunes de nos fondements

Les défauts des fondements ensemblistes

- Hormis la foi, on ne peut rien dire sur la pertinence de l'activité mathématique
- $\mathbb{N} \in \sqrt{2}$ n'est pas plus faux que $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$
- $1 \subset \mathbb{N}$ n'est pas moins pertinent que $1 \in \mathbb{N}$
- deux ensembles isomorphes n'ont pas les mêmes propriétés

On vit avec. Par exemple Godement écrit

On convient de considérer les ensembles $(X \times Y) \times Z$ et $X \times (Y \times Z)$ comme identiques : cette convention de langage est, à proprement parler, contradictoire...

Les assistants de preuve

Un assistant de preuves est un logiciel à l'aide duquel on peut

énoncer et prouver des résultats mathématiques.

Il en existe de très sophistiqués.
Certains d'entre eux (mais pas tous) reposent sur une correspondance de Curry-Howard.

L'histoire de la formalisation des maths sur ordinateur

- Vers 1970, création du premier assistant de preuves, Automath
- Dans les années 70, on "entre " dans Automath le livre d'analyse réelle de Lipschitz.
- Vers 2000, on entre dans Coq le théorème des quatre couleurs
- Vers 2013, on entre en Coq le théorème de Fejt-Thompson

Mais la communauté mathématique reste largement à l'écart de ces efforts, qui sont le fait d'informaticiens.

L'avenir de la formalisation des maths sur ordinateur

Ca mettra peut-être du temps mais

les matheux finiront par utiliser massivement les assistants de preuve comme ils utilisent massivement Tex.

Le Messie

Vladimir Voevodsky est un très haut dignitaire du régime :

il a reçu la Médaille Fields en 2004.

En plus pour de la géométrie algébrique. Plus précisément, une de ses innovations les plus brillantes a été l'extension de la théorie de l'homotopie à la géométrie algébrique.

Le nouveau testament

Ces gens viennent d'écrire un ouvrage collectif,

the HoTT book, disponible sur le web et dans toutes les bonnes librairies.

Comme toute bible qui se respecte, il est très bien écrit et convaincant (pour les fidèles).

Les preuves formelles

Une particularité de cette communauté, c'est qu'

ils vérifient leurs énoncés à l'aide d'assistants de preuve (Coq ou Agda).

Les formes de prosélytisme

Une autre particularité est qu'ils sont dynamiques et conviviaux

wiki, Google group...

Egalité

L'entreprise HoTT peut être comprise comme

une remise en cause de la notion d'égalité

On rejette l'égalité de Leibniz

$Leib := (T, a, b) \mapsto \forall P : T \to Type, P(a) \to P(b)$

Parce qu'on veut la propriété plus forte pour $Id_T(a, b)$

$\forall P : \forall a, b : T, p : a = b, Type,$
$(\forall c : T, P(c, c, reflc)) \to$
$\forall a, b : T, p : a = b, P(a, b, p).$

Cet axiome J est un peu mystérieux, mais antérieur à HoTT. Il dit plus ou moins :
Pour prouver une propriété P dépendant d'une preuve d'égalité, il suffit de traîter le cas d'une preuve par reflexivité.

Equivalence

Muni d'une notion d'égalité

on définit une notion d'équivalence entre deux morphismes de types, puis entre deux types

Une équivalence entre deux termes f et g de type $A \to B$, c'est une preuve de

$$\forall x : A, f(x) = g(x).$$

Une équivalence entre deux types A et B, c'est

deux morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to A$
avec une équivalence entre $g \circ f$ et 1_A et une entre $f \circ g$ et 1_B.

Univalence

Etant donnés deux types A et B, on a

$$IdtoEq : Id(A, B) \to Equiv(A, B)$$

Etant donnés deux types A et B, on a

l'axiome d'univalence dit que *IdtoEq* est une équivalence.

En gros cet axiome dit que l'égalité des types est l'équivalence.

Des questions ?

Conséquences de l'univalence

Grâce à l'axiome d'univalence, on peut montrer par exemple que

deux groupes isomorphes sont égaux

et bien sûr toutes sortes de résultats du même type.
On a résolu le problème de Godement.

Au lieu des ensembles, quoi ?

En HoTT, ce ne sont plus les ensembles qui ont la vedette.

Implicitement ce sont les Omega-groupoïdes.

Groupes d'homotopie

On a vu qu'on a des groupes d'homotopie pour les types

mais qu'on n'a pas de types pour lesquels ces groupes sont non-triviaux.

Sphères

Pour avoir les sphères

on s'autorise les types inductifs supérieurs

Exemple

Inductive circle : Type :=
base : circle
| loop : base =base.

Exemple

Inductive sphere : Type :=
base2 : sphere
| loop2 : refl(base2) =refl(base2).

Groupes d'homotopie des sphères

Les gens de HoTT ont réussi à

calculer plein de groupes d'homotopie de ces nouvelles sphères.

La nouvelle théorie de l'homotopie

On peut de la même façon

reformuler en HoTT de larges pans de la théorie de l'homotopie (classique).

La communauté HoTT s'est engouffrée dans cette brèche.

Les nouveaux théorèmes impliquent les anciens

l'homotopie des espaces topologiques (ou des ensembles simpliciaux) n'est qu'un modèle de la théorie des types homotopique.

L'hypothèse basse

HoTT reste durablement un courant marginal

comme l'a été jusqu'à présent le courant constructiviste.

L'hypothèse intermédiaire

HoTT prend de l'ampleur et

provoque une scission dans les mathématiques.

L'hypothèse haute

HoTT fait tache d'huile,

les fondements univalents sont progressivement stabilisés, et universellement adoptés.

C'est fini

Merci de votre indulgence et à Anthony.