Introduction

Dédou

Février 2012

Approcher π

Un truc qu'on fait tout le temps, c'est "approcher".
On écrit par exemple

$$\pi \sim 3.1416 \ .$$

Ca n'a pas un sens mathématique précis

Les mathématiciens considèrent, un peu à juste titre, que ça ne sert à rien d'approcher si on ne sait rien sur l'erreur.

Encadrer π

Dans l'exemple, l'erreur, c'est

$$E := 3.1416 - \pi$$

et ce qu'on sait sur cette erreur, c'est
un *encadrement*, comme $$-0.00001 \leq E \leq 0.00001$$
Au total, ce qu'on a, c'est un encadrement de π :

$$3.14159 \leq \pi \leq 3.14161$$

Pour π on connaît de bien meilleurs encadrements (voir par exemple ici :
`http://trucsmaths.free.fr/images/pi/pi2400.htm`).

Les trois faces d'un encadrement

On peut "voir" un encadrement

$$3.14159 \leq \pi \leq 3.14161$$

comme une approximation sous trois angles :

- par dessous : on dit alors que 3.14159 est une approximation de π par défaut à 0.00002 près
- par dessus : on dit alors que 3.14161 est une approximation de π par excès à 0.00002 près
- par le milieu : on dit alors que 3.1416 est une approximation de π à 0.00001 près

Les trois faces d'un encadrement : exos

Exo 1.1

a) Interpréter l'encadrement suivant comme une approximation par le milieu

$$2 \leq e \leq 3.$$

b) Convertir en double inégalité l'information suivante : 2.72 est une approximation par excès à 0.002 près de e.

Les deux faces de l'approximation

L'activité d'approximation comporte donc deux volets :

- identifier un procédé pour fabriquer une ou des approximations
- dire ce qu'on peut sur l'erreur (encadrement).

C'est ce qu'on va faire dans ce cours pour des fonctions :

- Approcher des fonctions compliquées par des fonctions simples ;
- d'abord par des fonctions linéaires (affines)
- et plus tard par des polynômes.
- Le clou de l'affaire ç'est **la formule de Taylor**, qui approche, au sens qu'on a expliqué, nos fonctions par des polynômes.