MatDis Résumé6 **Applications** 03/09 L1M

1 Applications

Définition : une application de l'ensemble E vers l'ensemble F est une partie G de $E \times F$ vérifiant la condition de "graphitude totale" :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in G.$$

La condition de "graphitude totale" peut bien sûr se dire en français :

pour tout élément x de E, il existe un unique y de F tel que le couple (x, y) soit dans G.

Notations : on note $E \to F$ l'ensemble des applications de E vers F. Et pour $g : E \to F$ et $x \in E$, on note $g(x)$ l'unique $y \in F$ tel que (x, y) soit dans g. Si, dans le contexte $(C, x : E)$, la formule $f(x)$ définit un élément de F, alors, quand x décrit E, l'ensemble des couples $(x, f(x))$ définit (dans le contexte C) une application qu'on note $x \mapsto f(x)$. Dans cette notation, la variable x est liée, et on peut la remplacer par toute autre variable disponible, y, z, etc.

Vocabulaire : si f est dans $E \to F$, on dit que E est le domaine et F le codomaine de f.

Exemples ...

2 Applications partielles

Définition : une application partielle de l'ensemble E vers l'ensemble F est une partie G de $E \times F$ vérifiant la condition de "graphitude partielle" :

$$\forall x \in E, \forall y, y' \in F, (x, y) \in G \,\mathrm{et} (x, y') \in G \Longrightarrow y = y'.$$

Cette condition dit que, pour tout x de E, il existe au plus un élément y de F tel que le couple (x, y) soit dans G.

Notation : on note $E \dashrightarrow F$ l'ensemble des applications partielles de E vers F.

Pour définir une application partielle de E vers F, autrement dit un élément de $E \dashrightarrow F$, il faut donc donner une partie G de $E \times F$ et prouver qu'elle vérifie la condition de graphitude partielle.

Définition : si f est une application partielle de E vers F, on définit le domaine de définition de f, noté DDf par

$$DDf := \{x \in E | \exists y : F, (x, y) \in f\}.$$

On a donc $DD : (E \dashrightarrow F) \to \mathcal{P}(E)$.

Et pour $g : E \dashrightarrow F$ et $x \in DDg$, on note $g(x)$ l'unique $y \in F$ tel que (x, y) soit dans g.

Exemples ...

3 Fonctions

Si F est un ensemble, on note $F_\perp$ l'ensemble obtenu en ajoutant à F un nouvel élément noté $\perp_F$ ou plus simplement $\perp$, qu'on appelle bottom (c'est le mot anglais).

Définition : une fonction de l'ensemble E vers l'ensemble F est une application de E vers $F_\perp$.

Exemples : ...

Définition : si f est une fonction de E vers F, on définit le domaine de définition de f, noté DDf par

$$DDf := \{x \in E | f(x) \neq \perp\}.$$

On a donc $DD : (E \to F_\perp) \to \mathcal{P}(E)$.

Définition : si f est une fonction de E vers F, on définit le graphe de f, noté $\mathrm{Gr}\, f$ par

$$\mathrm{Gr}\, f := \{(x, f(x)) | x \in DDf\}.$$

On a donc $\mathrm{Gr} : (E \to F_\perp) \to \mathcal{P}(E \times F)$.

Proposition. Ce graphe est une partie G de $E \times F$ vérifiant la condition de "graphitude partielle".

C'est donc une application partielle. On a donc plus précisément $\mathrm{Gr} : (E \to F_\perp) \to (E \dashrightarrow F)$.

Proposition. L'application Gr de $(E \to F_\perp)$ vers $E \dashrightarrow F$ est une bijection.

Autrement dit, si G est une partie de $E \times F$ vérifiant la condition de "graphitude partielle", alors G est le graphe d'une unique fonction de E vers F.

On note $\mathrm{fun} : (E \dashrightarrow F) \to (E \to F_\perp)$ l'application réciproque. Si G est une application partielle, $\mathrm{fun}(G)$ est la fonction de graphe G.

Pour résumer cette affaire, on dit que ça revient au même de se donner une application partielle et de se donner une fonction, et dans nos têtes, on ne fait pas de différence entre $E \dashrightarrow F$ et $E \to F_\perp$.

Exemples : ...

4 La construction Mapsto

En pratique, on définit une fonction $f : E \to F_\perp$ par une formule identifiant $f(x)$. Et pour bien gérer le statut spécial de la variable x intervenant dans la formule, pour gérer le fait que cette variable n'est pas libre, au lieu de noter notre fonction $f(x)$, ce qui serait frauduleux puisqu'il n'y a pas de x dans le contexte, on la note $x \mapsto f(x)$.

Par exemple la fonction logarithme ne se note pas $\ln x$, elle se note $x \mapsto \ln x$, ou, si on veut faire l'original, ou que x est dans le contexte, on la note $y \mapsto \ln y$. Bien sûr, on peut aussi parler de la fonction ln. Mais par exemple pour la fonction exponentielle, on ne peut pas parler de la fonction e, et donc on est rudement tenté de parler de la fonction e^x, eh ben non, c'est absolument interdit.

Quel est, au juste, le statut de ce $f(x)$? Autrement dit que peut-on écrire à droite de $\mapsto$? La réponse dépend du contexte C dans lequel on se trouve : à droite de $\mapsto$, on peut/doit mettre une formule qui, dans le contexte augmenté $(C, x : E)$, est de type F (pour une application) ou $F_\perp$.