Applications

Dédou

Mars 2010

Application partielle

Définition

Une application partielle (certains disent "fonction") de l'ensemble E vers l'ensemble F est une partie G de $E \times F$ vérifiant la condition d' "unicité de l'image" :

$$\forall x \in E, \forall y, y' \in F, (x, y) \in G \text{ et } (x, y') \in G \Rightarrow y = y'.$$

Si une partie G de $E \times F$ vérifie cette condition, on dit aussi que G est un graphe partiel.
On a le double langage "algébrique" et "géométrique".

Exemple

$\{(x, y) : \mathbb{R}^2 | y^2 = x \text{ et } y \geq 0\}$. est un graphe partiel.

Exo

Donnez votre exemple favori d'application partielle.

Recette

Pour définir une application partielle de E vers F,

il faut donc donner une partie G de $E \times F$ et prouver qu'elle vérifie la condition d'unicité de l'image.

Exemple

$\{(x, y) : \mathbb{R}^2 | x(y^3 + y) = 1\}$. est un graphe partiel.

Ensembles d'applications partielles

Notation :

L'ensemble des applications partielles de E vers F est noté $E \dashrightarrow F$.

Domaine de définition

Si G est une application partielle de E dans F

le domaine de définition de G est la partie suivante de E :
$DDG := \{x : E | \exists y : F, (x, y) \in G\}$.

Exemple

le domaine de définition de $\{(x, y) : \mathbb{R}^2 | x = e^y\}$ est $]0, +\infty[$.

Exo

Quel est le domaine de définition de $\{(x, y) : \mathbb{R}^2 | x(y^3 + y) = 1\}$?

Image

Définition

Pour $g : E \dashrightarrow F$, $x \in DDg$ et $y : F$, on dit que y est l'image de x par g si (x, y) est dans g.

Notation fonctionnelle

Notation

Si g est une application partielle de E dans F et x un élément de DDg, on note $g(x)$ l'unique élément de F vérifiant $(x, y) \in g$.

Contrepartie

En contrepartie de cette notaton commode, on doit, chaque fois qu'on l'utilise, montrer que le contexte assure bien que x est dans DDg.

Composition d'applications partielles

Définition

Soient R, S, T trois ensembles, f une application partielle de R dans S et g une application partielle de S dans T. On définit leur composée par la formule

$$g \circ f := \{(x, z) : R \times T | \exists y : S, (x, y) \in f \text{ et } (y, z) \in g\}.$$

Proposition

Dans le même contexte, $g \circ f$ est une application partielle.

Et ça se prouve.

Associativité

Proposition

La composition des applications partielles est associative.

Applications multivoques

Définition

Une application multivoque de l'ensemble E vers l'ensemble F est une partie G de $E \times F$ vérifiant la condition d' "existence de l'image" :

$$\forall x \in E, \exists y \in F, (x, y) \in G.$$

Exemple

$\{(x, y) : \mathbb{R}^2 | y^2 = x^2 + 1\}$. est une application multivoque.

Exo

Donnez votre exemple favori d'application multivoque.

Composition d'applications multivoques

Définition

Soient R, S, T trois ensembles, f une application multivoque de R dans S et g une application multivoque de S dans T. On définit leur composée par la même formule

$$g \circ f := \{(x, z) : R \times T | \exists y : S, (x, y) \in f \text{ et } (y, z) \in g\}.$$

Proposition

Dans le même contexte, $g \circ f$ est une application multivoque.

Et ça se prouve.

Associativité

Proposition

La composition des applications multivoques est associative.

Et ça se prouve.

Applications

Définition

On dit qu'une application partielle g de E dans F est une application (tout court) de E dans F si elle vérifie la condition d'existence des images autrement dit si c'est une application multivoque.

En français, ça se dit :

Une application de E dans F est une partie g de $E \times F$ telle que, pour chaque élément x de E, il existe exactement un y avec $(x, y) \in g$.

Pour une application, il y a donc existence et unicité de l'image. Ce n'est pas négociable.

Ensemble d'applications

Notation :

L'ensemble des applications de E vers F est noté $E \rightarrow F$.

C'est une partie de $E \dashrightarrow F$.
Pour $g : E \rightarrow F$ et $x \in E$, on peut noter $g(x)$ l'unique $y \in F$ tel que (x, y) soit dans g et cette fois, il n'y a rien à vérifier.

Recette

Pour définir une application de E vers F,

il faut donc donner une partie G de $E \times F$ et prouver qu'elle vérifie les deux conditions d'existence et d'unicité de l'image.

A ne pas confondre avec surjectivité et injectivité qui sont les conditions d'existence et d'unicité des antécédents.

Exemple

$\{(x, y) : \mathbb{R}^2 | y^3 + y = x\}$ est une application.

Composition d'applications

Proposition

La composée de deux applications est une application.

Et ça se prouve.

L'égalité des applications

Proposition

Deux applications g et h de E dans F sont égales ssi tout x de E a la même image par g et par h.

Et ça se prouve.

La construction mapsto

En pratique,

on définit une application $f : E \longrightarrow F$ par une formule identifiant $f(x)$.
Pour bien gérer le statut spécial de la variable x, au lieu de noter notre application $f(x)$, ce qui serait frauduleux (pas de x dans le contexte), on la note $x \mapsto f(x)$.

Applications injectives

Définition

on dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est injective si elle vérifie la condition d'unicité des antédédents :

$$\forall xy : E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3$ est une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriétés des applications injectives

Proposition

i) la composée de deux applications injectives est injective
ii) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
iii) si $f \circ g$ et $f \circ h$ sont égales et f est injective, alors g et h sont égales.
iv) si $f : E \longrightarrow F$ est injective avec E non vide, alors il existe $g : F \longrightarrow E$ avec $g \circ f = Id_E$.

Applications surjectives

Définition

on dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si elle vérifie la condition d'existence des antédédents :

$$\forall y : F, \exists x : E, f(x) = y.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3$ est une application surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriétés des applications surjectives

Proposition

i) la composée de deux applications surjectives est surjective
ii) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
iii) si $g \circ f$ et $h \circ f$ sont égales et f est surjective, alors g et h sont égales.

L'axiome du choix

L'énoncé suivant est plutôt vrai mais pas démontrable

iv) si $f : E \longrightarrow F$ est surjective, alors il pourrait bien exister $g : F \longrightarrow E$ avec $f \circ g = Id_F$.

L'hypothèse du continu

L'énoncé suivant est plutôt vrai mais pas démontrable

Soit P une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors ou bien P est l'image d'une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ou bien P est l'image d'une application injective $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Applications bijectives

Définition

on dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si elle est injective et surjective, autrement dit si elle vérifie la condition d'existence et d'unicité des antécédents.