

## 1 Objectifs et tactiques

Quand on fait une preuve, on a une pile d'objectifs : un objectif, c'est un contexte  $C$  avec un énoncé  $E$  "valide" dans ce contexte. On dit que  $D$  est le contexte et  $E$  le but de l'objectif.

"Valide", ça veut dire que les variables libres dans  $E$  sont dans le contexte  $C$ , et que, si  $E$  comporte des constructions "partielles", c'est-à-dire pas partout définies, comme la division, les hypothèses du contexte garantissent que tout va bien (on abordera ce genre de questions plus en détail plus loin).

Voici un exemple d'objectif :

$$C := x : \mathbf{R}, y : \mathbf{R}, x \leq y; E := x^2 \leq y^2 \implies y \geq 0.$$

On l'écrira  $(C; E)$  ou encore  $(x : \mathbf{R}, y : \mathbf{R}, x \leq y; x^2 \leq y^2 \implies y \geq 0)$ .

Au départ de la preuve d'un énoncé  $E$ , la pile contient un seul objectif, dont le contexte est vide, et le but est  $E$ . La preuve consiste à appliquer des tactiques à l'objectif courant, le premier de la pile. Chaque tactique modifie l'objectif courant, et éventuellement la pile. La preuve est finie quand la pile est vide. Dans ce cours, on fait le tour des tactiques "logiques" de base.

Pour chaque tactique, il faut dire comment elle modifie la pile, et ce qu'on écrit, dans la preuve, pour signifier qu'on applique cette tactique. On distinguera aussi selon que la tactique "mange du pain (mdp)" en ce sens que son application est susceptible de compromettre la suite de la preuve, ou "ne mange pas de pain (mpdp)" en ce sens qu'on peut l'appliquer les yeux fermés, sans risquer de compromettre la suite de la preuve.

## 2 Tactiques Et

Il y a une tactique "Et au but" qui s'applique quand l'objectif courant est de la forme  $(C; A \text{ et } B)$ . Elle remplace cet objectif par les deux objectifs  $(C; A)$  et  $(C; B)$ . En français, ça se dit : pour prouver  $A$  et  $B$ , il faut (ou plutôt il suffit de) prouver  $A$  et prouver  $B$ . Et dans la preuve écrite, on met par exemple : "Commençons par prouver  $A$ ", puis, quand on a fini la preuve de  $A$ , on met par exemple "Et maintenant prouvons  $B$ ". Cette tactique ne mange pas de pain.

Il y a une autre tactique "Et dans le contexte" qui s'applique quand le contexte courant  $C$  contient une hypothèse de la forme  $A \text{ et } B$ . Elle remplace juste, dans le contexte, l'hypothèse en question par deux hypothèses, une pour  $A$  et une pour  $B$ . En français, ça se dit : si on sait  $A \text{ et } B$ , on sait  $A$  et on sait  $B$ . Cette affaire est un peu du coupage de cheveu en quatre, et dans la preuve écrite, on n'en parle pas. Bien entendu, cette tactique ne mange pas de pain.

Il y a encore une variante de la tactique Et pour le but, qu'on peut appeler la tactique "EtAlors", qu'on signale au passage : au lieu de remplacer l'objectif courant par  $(C; A)$  et  $(C; B)$ , elle le remplace par  $(C; A)$  et  $(C, H : A; B)$ . La différence est donc que pour la preuve de  $B$ , on pourra utiliser l'hypothèse  $A$ .

## 3 Tactiques Ou

Il y a une tactique "Ou au but" qui s'applique quand l'objectif courant est de la forme  $(C; A \text{ ou } B)$ . Plus exactement, il y en a deux, une "de gauche" et une "de droite" :

Celle de gauche remplace cet objectif par les deux objectifs  $(C; A)$  et celle de droite le remplace par  $(C; B)$ . En français, ça se dit : pour prouver  $A \text{ ou } B$ , il suffit de prouver  $A$  (dans le premier cas) ou de

prouver  $B$  (dans le second). Et dans la preuve écrite, on met par exemple : “Pour prouver  $A$  ou  $B$ , on va prouver  $A$ ”, dans le cas “gauche”, et bien sûr, “Pour prouver  $A$  ou  $B$ , on va prouver  $B$ ”, dans le cas “droite”.

Cette tactique mange du pain, notamment parce qu’on peut se tromper de côté.

Il y a une autre tactique “Ou dans le contexte” qui s’applique quand le contexte courant  $C$  contient une hypothèse de la forme  $A$  ou  $B$ . Elle remplace l’objectif courant  $(C, H : A \text{ ou } B; E)$  par les deux objectifs  $(C, H : A; E)$  et  $(C, H : B; E)$ . En français, ça se dit : si on a  $A$  ou  $B$ , il faut (ou plutôt il suffit de) traiter le cas où on a  $A$ , puis traiter le cas où on a  $B$ . Dans la preuve écrite, on met par exemple “Commençons par supposer qu’on a  $A$ ”, puis, quand on a fini la preuve de ce cas, on met par exemple “Et maintenant supposons qu’on a  $B$ ”.

Cette affaire est un peu du coupage de cheveu en quatre, et dans la preuve écrite, on n’en parle pas. Bin entendu, cette tactique ne mange pas de pain.

Il y a encore une variante de la tactique Et pour le but, qu’on peut appeler la tactique EtAlors, qu’on signale au passage : au lieu de remplacer l’objectif courant par  $(C; A)$  et  $(C; B)$ , elle le remplace par  $(C; A)$  et  $(C, H : A; B)$ . La différence est donc que pour la preuve de  $B$ , on pourra utiliser l’hypothèse  $A$ .

## 4 Tactiques Implique

Il y a une tactique “Implique au but” qui s’applique quand l’objectif courant est de la forme  $(C; A \implies B)$ . Elle remplace cet objectif par l’objectif  $(C, H : A; B)$ . En français, ça se dit : pour prouver  $A \implies B$ , on suppose  $A$  et on prouve  $B$ .

Et dans la preuve écrite, on met par exemple : “Supposons  $A$ ”, et si on est d’humeur bavarde, on ajoute “et prouvons  $B$ ”.

Cette tactique ne mange pas pain.

On ne parle pas ici de tactique “Implique dans le contexte”. Si on veut, on peut réécrire  $A \implies B$  en ‘non  $A$  ou  $B$ , et appliquer la tactique “Ou dans le contexte”.

## 5 Tactiques Vrai, Faux, Non

Il y a une tactique “Vrai au but” qui s’applique quand le but courant est Vrai. Elle retire le but courant de la pile. En français, ça se dit : Vrai est vrai. Cette tactique ne laisse pas vraiment de trace dans les preuves écrites.

Symétriquement, il y a une tactique “Faux dans le contexte” qui s’applique quand le contexte contient une hypothèse  $H; \text{Faux}$ . Elle retire aussi le but courant de la pile. En français, on dirait “Faux est impossible”. Et dans la preuve écrite, on peut écrire quelque chose comme “Ce cas est impossible”. Il va sans dire que ces deux tactiques ne mangent pas de pain.

Il n’y a pas de tactique “Non”, ce qui correspond au fait que la négation se calcule.

## 6 Tactiques QuelqueSoit

Il y a une tactique “QuelqueSoit au but” qui s’applique quand l’objectif courant est de la forme  $(C; \forall x : E, P)$ . Elle transforme l’objectif en  $(C, x; E; P)$ . Il faut bien voir que cette tactique “libère” la variable  $x$  : “avant”, elle est liée dans  $P$ , tandis qu’ “après”, elle y est libre (pour être plus complet, il faut dire que si, avant l’application de cette tactique,  $x$  apparaît déjà dans  $C$ , il faut faire un changement de nom pour éviter le clash). En français, ça peut se dire : pour montrer “pour tout  $x$ ,  $P$ ”, on montre  $P$  pour un  $x$  quelconque. Dans la preuve écrite, on écrit souvent : “Soit  $x$  un élément quelconque de  $E$ ”. Cette tactique ne mange pas de pain.

## 7 Tactiques IIExiste

Il y a une tactique “IIExiste au but” qui s’applique quand l’objectif courant est de la forme  $(C; \exists x : E, P)$ . Cette tactique se distingue des précédentes par le fait qu’elle comporte un argument, le témoin, qui est de type  $E$ . L’utilisateur de cette tactique doit donc donner ce témoin  $t$ , qui doit être une formule de type  $E$  (dans le contexte  $C$ ). L’effet de la tactique est de transformer l’objectif courant en  $(C; P[x := t])$ , où  $P[x := t]$  désigne l’énoncé obtenu en remplaçant, dans  $P$ ,  $x$  par  $t$ .

En français, ça se dit : pour prouver qu’il existe  $x$  vérifiant  $P$ , il faut (ou plutôt il suffit de) montrer un  $t$  qui vérifie  $P$ . Et dans la preuve écrite, on met : “Montrons que  $t$  a la propriété voulue”, ou éventuellement “On vérifie facilement que  $t$  a la propriété voulue”.

Cette tactique est très panivore : il ne faut pas se tromper de témoin, sinon c’est foutu.

Il y a également une tactique “IIExiste dans le contexte” qui s’applique quand le contexte courant comporte une hypothèse  $H$  de la forme  $\exists x : E, P$ . Cette tactique ne change pas le but courant. Elle remplace, dans le contexte, l’hypothèse  $H$  par une variable  $x$  (sauf qu’en cas de clash, il faut changer le nom de cette variable avant de la libérer), accompagnée d’une nouvelle hypothèse  $H' : P$ . En français, ça peut se dire : si on sait qu’il existe  $x$  vérifiant  $P$ , alors on peut supposer qu’on a un tel  $x$ . Dans la preuve écrite, on n’écrit rien, c’est encore une tactique qui coupe les cheveux en quatre.

## 8 Tactique Contraposer

La tactique “Contraposer” s’applique à chaque hypothèse  $H : P$  du contexte courant. Si l’objectif courant s’écrit  $(C, H : P; B)$ , cette tactique le transforme en  $(C, H : \text{non } B; \text{non } P)$ . En français, ça peut se dire : pour prouver  $B$  sachant  $P$ , il suffit de prouver  $\text{non } P$  sachant  $\text{non } B$ . Dans la preuve écrite, on peut mettre : en contraposant, on peut supposer  $\text{non } B$  et on doit prouver  $\text{non } P$ .

Cette tactique ne mange pas de pain.

## 9 Tactique Absurde

Il y a une tactique “Absurde” qui s’applique à tout objectif  $(C; B)$ . Son effet est d’ajouter au contexte l’hypothèse  $\text{non } B$ . En français, ça peut se dire : pour démontrer  $B$ , on peut supposer  $\text{non } B$ . Dans la preuve écrite, on peut mettre : raisonnons par l’absurde et supposons donc  $\text{non } B$ .

Il y a une variante de la tactique “Absurde” qu’on peut appeler “Contradiction”. Cette tactique introduit un but auxiliaire  $A$  et transforme l’objectif courant  $(C; B)$  en les deux objectifs (contradictoire)  $(C, H : \text{non } B; A)$  et  $(C, H : \text{non } B; \text{non } A)$ . En français, ça peut se dire : pour démontrer  $B$ , on peut supposer  $\text{non } B$  et trouver une contradiction. Dans la preuve écrite, on peut mettre : raisonnons par l’absurde. Supposons donc  $\text{non } B$  et montrons successivement  $A$  et  $\text{non } A$ .

En pratique,  $A$  est souvent déjà connu, et donc il suffit de montrer  $\text{non } A$ . Dans ce cas bien sûr, dans la preuve écrite, on mettra seulement : raisonnons par l’absurde. Supposons donc  $\text{non } B$  et montrons  $\text{non } A$ .

On voit donc que la différence n’est pas énorme entre la tactique Absurde et la tactique Contraposer. Il est recommandé de préférer la seconde. En effet, bien qu’elle ne mange pas de pain, la tactique Absurde est plutôt mal vue, principalement parce que les débutants ont tendance à en abuser.

## 10 Tactique Distinguer

La tactique “Distinguer” s’applique à tout objectif  $(C; B)$ . Elle comporte un argument, qui est un énoncé  $A$  (qui doit être bien formé dans le contexte  $C$ ). Cette tactique génère les deux objectifs :  $(C, H : A; B)$  et  $(C, H : \text{non } A; B)$ . En français, ça se dit : pour prouver  $B$ , on peut traiter séparément le cas où  $A$  est vrai

et celui où  $A$  est faux. Dans la preuve écrite, on peut mettre : distinguons selon que  $A$  est vrai ou non. Cette tactique ne mange pas de pain.

## 11 Tactique Observer

Comme la tactique Distinguer, la tactique "Observer" s'applique à tout objectif  $(C; B)$  et comporte un argument qui est un énoncé  $A$ . Cette tactique génère les deux objectifs :  $(C; A)$  et  $(C, H : A; B)$ . En français, ça se dit : pour prouver  $B$ , on peut prouver  $A$ , puis supposer  $A$  et prouver  $B$ . Dans la preuve écrite, on peut mettre : commençons par prouver  $A$ . Cette tactique mange du pain, puisque, si ça se trouve,  $A$  n'est pas vrai.