Booléens et connecteurs

Dédou

Février 2010

Les deux booléens

Les deux booléens

L'ensemble, noté $\mathbb{B}$ des booléens a exactement deux éléments

- Vrai, qu'on note V quand on est pressé
- Faux, qu'on note F quand on est pressé.

Autrement dit

$$\mathbb{B} := \{V, F\}.$$

Sur ce petit ensemble ridicule, on a plein d'opérations très importantes, qu'on appelle aussi **connecteurs**.

La négation

La négation est un connecteur “unaire” (i.e. à un seul argument)

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{neg}: & \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & b & \longmapsto & \overline{b} \\ & b & \longmapsto & \text{if } \ b = V \ \text{ then } \ F \ \text{ else } \ V \end{array}$$

L’explicitation de la négation

$$\forall b : \mathbb{B}, \quad \overline{b} \quad = \quad \text{if } \ b = V \ \text{ then } \ F \ \text{ else } \ V.$$

Exo

Démontrez que $\mathrm{neg} \circ \mathrm{neg}$ est l’identité de $\mathbb{B}$.

Mon premier connecteur binaire

La conjonction est un connecteur “binaire” (i.e. à deux arguments)

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{rccl} \text{and} : & \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & (b, b') & \longmapsto & b \text{ and } b' \\ & (b, b') & \longmapsto & \text{if } \ b = V \ \text{ then } \ b' \ \text{ else } \ F. \end{array}$$

L’explicitation de la conjonction

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \text{ and } b' \ = \ \text{if } \ b = V \ \text{ then } \ b' \ \text{ else } \ F.$$

Exo

a) Calculez V and F.

b) Donnez une autre formule pour la même opération.

Ma première table de vérité

Plutôt que la formule pourrie

$$\text{and} := (b, b') \mapsto \quad \text{if} \quad b = V \quad \text{then} \quad b' \quad \text{else} \quad F$$

on préfère donner la table de vérité, qui contient la même information

A and B	V	F
V	V	F
F	F	F

Mon deuxième connecteur binaire

La disjonction est aussi un connecteur “binaire”

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{rccl} \text{or}: & \mathbb{B}\times\mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & (b,b') & \longmapsto & b \text{ or } b' \\ & (b,b') & \longmapsto & \quad \text{if} \quad b = V \quad \text{then} \quad V \quad \text{else} \quad b'. \end{array}$$

Exo

a) Calculez F or V.
b) Ecrivez la règle d'explicitation de la disjonction.
c) Ecrivez la table de vérité de la disjonction.

Mon troisième connecteur binaire

L'implication est encore un connecteur "binaire"

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{rccl} \text{impl}: & \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & (b, b') & \longmapsto & b \Rightarrow b' \\ & (b, b') & \longmapsto & \text{ if } \; b = V \; \text{ then } \; b' \; \text{ else } \; V. \end{array}$$

Exo

a) Calculez $F \Rightarrow V$.
b) Ecrivez la table de vérité de l'implication.
c)Donnez une autre formule pour la même opération.

Zoom sur $F \Rightarrow V$

Certains ont du mal avec

$F \Rightarrow V$ est vrai !

Pourtant

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ est bien vrai.
b) C'est donc vrai en particulier pour $x := -2$, ce qui veut dire

$$-2 \geq 1 \Rightarrow 4 \geq 1$$

c) Or $-2 \geq 1$ est faux et $4 \geq 1$ est vrai ....

Si ce tour de passe-passe ne vous a pas convaincu

a) l'égalité $F \Rightarrow V \ = \ V$ est imposée par la définition de $\Rightarrow$.
b) Il s'agit donc d'une convention, qu'on peut aimer ou détester, mais dont il faut savoir qu'elle est universellement respectée.

Equations algébriques

Les opérations intéressantes ont des propriétés intéressantes.

Nos connecteurs vérifient des tas de belles relations,
qu'on va effleurer.

Exo

a) Rappelez une propriété de l'addition des nombres.
b) Rappelez une relation entre l'addition et la multiplication des nombres.

Une commutativité

La conjonction est commutative

- version française : la conjonction ne dépend pas de l'ordre de ses deux arguments.
- version formelle :

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \text{ and } b' \quad = \quad b' \text{ and } b.$$

Preuve ?

Ca se voit bien sur la table de vérité.

Ce n'est pas une preuve !

Une preuve de commutativité

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \text{ and } b' \quad = \quad b' \text{ and } b.$$

Preuve

Soient donc b et b' nos deux booléens [on **explicite** $\forall$]

et supposons d'abord b vrai. [on **distingue selon** b]

Si b' est vrai, [maintenant on **distingue selon** b']

on trouve b and $b' = V$ et b' and $b = V$ et il y a bien égalité.

[on **réécrit avec** $\text{and}(b, b') = \text{ if } b = V \text{ then } b' \text{ else } F$]

Si b' est faux [deuxième cas pour b']

on trouve b and $b' = F$ et b' and $b = F$ et il y a encore égalité.

[on **réécrit avec** la même formule]

Le cas où b est faux [deuxième cas pour b']

se traîte de la même façon.

Une autre commutativité

Exo

a) Donnez la version formelle de la commutativité de la disjonction.
b) Ecrivez une preuve de cette commutativité où les tactiques se voient bien.

L'implication n'est pas commutative

Version formelle de la commutativité (fausse) de l'implication :

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \Rightarrow b' \quad = \quad b' \Rightarrow b.$$

Version formelle de la non-commutativité de l'implication :

$$\exists b, b' : \mathbb{B}, \quad b \Rightarrow b' \quad \neq \quad b' \Rightarrow b.$$

Preuve de la non-commutativité de l'implication :

On prend $b := V$ et $b' := F$; [on **exhibe** les témoins de l'existence]
on trouve $\quad b \Rightarrow b' = F$ et $b' \Rightarrow b = V$ et il n'y a pas égalité.
[on **réécrit avec** $\mathrm{impl}(b, b') = \;$ if $\; b = V \;$ then $\; b' \;$ else $\; V$]

Une associativité

La conjonction est associative

- version française : on peut calculer a and b and c en commençant de n'importe quel côté.
- version formelle :

$$\forall a, b, c : \mathbb{B}, \quad (a \text{ and } b) \text{ and } c \quad = \quad a \text{ and } (b \text{ and } c).$$

Preuve

On inspecte les huit cas...

Exo

Traîtez le cas (V, F, F).

Une autre associativité

Exo

Donnez la version formelle de l'associativité de la disjonction.

L'implication n'est pas associative

Exo

a) Donnez une version formelle de la non-associativité de l'implication.
b) Donnez une preuve de cette non-associativité.

Une équation à deux connecteurs

La conjonction distribue la disjonction

- version française : la disjonction avec une conjonction est la conjonction des disjonctions.
- version formelle :

$$\forall a, b, c : \mathbb{B}, \quad (a \text{ and } b) \text{ or } c \quad = \quad (a \text{ or } c) \text{ and } (b \text{ or } c).$$

Preuve

On inspecte les huit cas...

Exo

Traîtez le cas (V, F, F).

Le choix des mots

Qui est distributif ?

- dans $a(b+c) = ab + ac$, on voit que la multiplication est distribuée
- et donc, si quelqu'un distribue, c'est l'addition.
- On pourrait dire "l'addition distribue la multiplication".
- Mais on dit "la multiplication est distributive par rapport à l'addition".
- On a qu'à se dire que distributif veut dire distribuable.

Une autre distributivité

Exo

Donnez la version formelle de la distributivité de la disjonction sur la conjonction.

Une autre relation entre deux connecteurs

La contrapostion

- version française : une implication ne change pas de valeur quand on remplace chaque argument par la négation de l'autre.
- version formelle :

$$\forall a, b : \mathbb{B}, \quad a \Rightarrow b \quad = \quad \overline{b} \Rightarrow \overline{a}.$$

Une relation entre trois connecteurs

La négation d'une conjonction

- version française : la négation d'une conjonction est la disjonction des négations.
- version formelle :

$$\forall a, b : \mathbb{B}, \quad \overline{a \text{ and } b} \quad = \quad \overline{a} \text{ or } \overline{b}.$$

Preuve

On inspecte les quatre cas.

Exo

Traîtez le cas (V, F).

La négation d'une disjonction

exo

Ecrivez l'énoncé qui permet de réécrire la négation d'une disjonction.

Booléens et électronique

L'électronique numérique

- sait fabriquer des circuits avec deux entrées et une sortie,
- qui constituent la contre-partie électrique de nos connecteurs.
- En combinant de tels circuits de base,
- on arrive à trouver une contre-partie électrique à des fonctions plus complexes,
- comme par exemple l'addition ou la multiplication des entiers (codés en binaire).