Définitions

Dédou

Mars 2010

Ma première définition

La façon la plus simple de poser une définition consiste à associer un **nom** à une **valeur**

Définition

Je pose toto $:=$ 123456789123456789123456789.

Ici le nom est toto et la valeur est 123456789123456789123456789.

Quand on pose une définition, il faut choisir un nom qui n'est pas déjà pris.

Dès qu'on doit écrire deux fois un objet, on gagne à lui donner un nom trois fois plus court.

Exo 1

Définissez votre nombre réel favori.

Ma deuxième définition

On peut aussi définir des fonctions.

Définition

On appelle cosinus hyperbolique (ou *ch*) la fonction $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Exo 2

Définissez votre fonction favorite.

Ma troisième définition

On peut aussi définir des ensembles.

Définition

On appelle **cercle unité** et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des couples (x, y) de réels vérifiant $x^2 + y^2 = 1$.

Ici on a donné deux noms, un long et un court.

Exo 3

Définissez votre ensemble favori.

Ma quatrième définition

On peut même définir des énoncés.

Définition

On appelle conjecture de Goldbach et on note CG l'énoncé suivant :
Tout entier pair est somme de deux nombres premiers.

Celui qui met "conjecture" dans le nom pense que l'énoncé est vrai sans en être sûr.

Exo 4

Traîtez CG pour l'entier 16.

Définition par propriété caractéristique

Pour donner une définition, il n'est pas nécessaire de donner une valeur, il suffit de donner une propriété caractéristique.

Définition

On appelle j l'unique racine cubique complexe de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive.

Celui qui profère cette définition doit savoir montrer que 1 a bien une et une seule racine cubique complexe de partie imaginaire strictement positive.

Définition fonctionnelle et définition vulgaire

Une définition fonctionnelle

On appelle **minimum** et on note min la fonction de deux variables réelles $(x, y) \mapsto \text{ if } x \leq y \text{ then } x \text{ else } y$.

Et sa variante vulgaire

Soient x et y deux nombres réels. On appelle **minimum** de x et y et on note $\min(x, y)$ le nombre $\text{ if } x \leq y \text{ then } x \text{ else } y$.

La variante vulgaire est plus facile à percevoir.
Donc c'est celle qu'on préfère.
Mais il faut bien comprendre qu'elle dit la même chose que l'autre.

Exo 5

Donnez la variante fonctionnelle de la définition vulgaire suivante :
Soit x un réel quelconque. On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre $\max(x, -x)$.

Vulgarité incontournable

Une définition vulgaire par propriété caractéristique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On appelle **borne supérieure** de f et on note $\sup f$ l'unique élément M de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $\forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M \quad \text{et} \quad \forall m < M, \exists x : \mathbb{R}, m < f(x)$.

On ne peut pas remplacer une définition vulgaire par propriété caractéristique par une variante fonctionnelle puisqu'il n'y a pas de formule.
Mais la définition vulgaire permet justement d'écrire une formule.
On peut donc donner la variante fonctionnelle en plus :

Variante fonctionnelle

On a donc défini une application $\sup : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$
caractérisée par les deux propriétés
$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq \sup f$ et
$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall m < \sup f, \exists x : \mathbb{R}, m < f(x)$.

Définition d'énoncés sans nom

Pour les énoncés

on donne souvent une terminologie “vulgaire” plutôt qu'un nom.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que f est **strictement croissante** si elle vérifie

$$\forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

On pourrait appeler “stricte_croissance” la fonction

$$f \mapsto \forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \iff f(x) \leq f(y),$$

mais on ne le fait guère.

Définitions très vulgaires

En pratique

on formule le plus souvent les énoncés en langue naturelle.

Quand on lit

Définition

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est convexe si elle est stable par combinaison linéaire barycentrique à coefficients positifs.

il faut comprendre un truc du genre

Définition

$$\begin{array}{rccl} cvx: & \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\in}) & \rightarrow & Prop \\ & P & \mapsto & cvx(P) \\ & P & \mapsto & \forall x, y : P, \forall a, b : \mathbb{R}_+^*, a + b = 1 \Rightarrow ax + by \in P. \end{array}$$

Exemple

Quand on lit

Définition

On dit qu'une fonction atteint son maximum en un point si elle y prend sa plus grande valeur.

il faut comprendre un truc du genre

Définition

$$\begin{array}{rccl} att\_max : & (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \times \mathbb{R} & \to & Prop \\ & (f, a) & \mapsto & att\_max(f, a) \\ & (f, a) & \mapsto & \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq f(a). \end{array}$$

Exo 6

Donnez votre variante fonctionnelle de la définition suivante :
On dit qu'un nombre majore une fonction s'il est plus grand que toute les valeurs prises par cette fonction.

Explicitation

Expliciter une définition

c'est remplacer le nom par la valeur qu'il représente.

Exemple

Expliciter
"la fonction cosinus atteint son maximum en $\sqrt{2}$"
c'est écrire

$$\forall x : \mathbb{R}, \cos x \leq \cos(\sqrt{2}).$$

Exo 7

Expliciter
"le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est convexe".