Enoncés

Dédou

Février 2010

Formules et nombres

Mon premier énoncé mathématique, c'est

$$2 + 2 = 4.$$

On y voit deux formules différentes pour le même nombre.

Exercice 1

Combien de formules peut-on écrire pour 4 avec deux chiffres et un $+$?

L'ensemble des formules pour les entiers

Il y a bien un ensemble des formules de type entier

mais on ne s'y est jamais trop intéressé.

Les réels et les angles

On a aussi un ensemble des formules pour les angles

tout réel est une formule pour un angle.

Pour bien faire

il faudrait noter différemment le réel et l'angle qu'il représente, mais personne ne le fait, et les boulets ne captent pas bien la différence.

Exo 2

Soit x un réel. Quels sont les réels qui représentent le même angle que x ?

Les fractions et les rationnels

On a aussi un ensemble des formules pour les rationnels

toute fraction est une formule pour un rationnel.

Pour bien faire

il faudrait noter différemment la fraction et le rationnel qu'elle représente, mais personne ne le fait, et les boulets ne captent pas bien la différence.

La différence entre fraction et rationnel apparaît quand

- on veut distinguer les fractions réductibles des fractions irréductibles :
- il n'y a pas de définition pertinente de rationnel "réductible".

Enoncés et booléens

Les énoncés sont

les formules pour les booléens.

L'ensemble de tous les énoncés

est noté *Prop* (au lieu d' "énoncé", on dit parfois "proposition").

Exemples

V and F et $V \Rightarrow F$

sont deux énoncés différents, qui sont vrais tous les deux.

Une différence :

$V \Rightarrow F$ a une réciproque, qui est $F \Rightarrow V$, tandis que V and F n'a pas de réciproque.

Exo 3

Donnez deux énoncés différents et qui sont tous les deux vrais.

Comment définir les énoncés ?

On va définir les énoncés en donnant

- une liste d'énoncés de base
- une liste de constructions pour formuler de nouveaux énoncés à partir d'anciens.

Ca nous rappelle les fonctions qu'on rencontre :

- y'a les fonctions de base, sinus, cosinus, logarithme, exponentielle, et les puissances ;
- y'a les sommes, produits, quotients ;
- y'a les composées.

Les énoncés de base

Voici nos énoncés de base

- V et F sont des énoncés
- si x et y sont deux éléments d'un même ensemble (par exemple $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), $x = y$ et $x \neq y$ sont des énoncés
- (pour être à l'aise) si x et y sont deux réels, $x \leq y$ et $x < y$ sont des énoncés.

Les connecteurs

Si A et B sont deux énoncés, il en est de même pour :

- A and B
- A or B
- $A \Rightarrow B$.

Exemple

$1 = 3$ or $V = F$ est un énoncé.

Exo 4

Donnez votre énoncé favori.

Le type des connecteurs

Nos connecteurs ont donc les types suivants :

- and : $Prop \times Prop \rightarrow Prop$
- or : $Prop \times Prop \rightarrow Prop$
- $\Rightarrow$: $Prop \times Prop \rightarrow Prop$.

Intermède : Enoncés et variables

Pour les énoncés comme pour le reste

il y a un contexte, et dans les énoncés, il peut y avoir des variables.

Exemple

Si x est une variable réelle et b une variable booléenne du contexte,

$$x \leq \pi \Rightarrow (b = F)$$

est un énoncé.

Exo 5

Donnez votre énoncé favori comportant deux variables réelles et deux connecteurs..

Les quantificateurs

Le truc sérieux pour faire des énoncés, c'est

les quantificateurs.

En première approximation

il y a deux quantificateurs ; $\forall$ ("pour tout") et $\exists$ ("il existe").

Les quantificateurs universels

Le quantificateur universel, c'est

quelque soit, alias pour tout, alias $\forall$. On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur universel est un énoncé universel.

En seconde approximation

il y a un quantificateur universel par ensemble.
On note très provisoirement $\forall_E$ le quantificateur universel pour l'ensemble E.
On a donc par exemple un quantificateur $\forall_{\mathbb{R}}$ et un autre $\forall_{\mathbb{B}}$.

Le quantificateur universel réel

Le quantificateur universel réel

a pour carte de visite :

$$\begin{array}{rcll} \forall_{\mathbb{R}} : & (\mathbb{R} \to Prop) & \to & Prop \\ & P & \mapsto & \forall_{\mathbb{R}} P \\ & P & \mapsto & \forall x : \mathbb{R}, P(x). \end{array}$$

Exemple d'énoncé "universel"

$$\forall x : \mathbb{R}, x \leq 0 \text{ or } 0 \leq x.$$

Exo 6

Donnez votre exemple favori d'énoncé universel faux.

Quantification et liaison

Dans $\forall x : \mathbb{R}, P(x)$

la variable x est liée.

Exemple

$$\forall x : \mathbb{R}, x \leq 0 \text{ or } 0 \leq x$$

et

$$\forall y : \mathbb{R}, y \leq 0 \text{ or } 0 \leq y$$

sont deux énoncés égaux.

Intermède : Egalité d'énoncés

Il est important de distinguer les variables liées des variables libres

mais il n'est jamais important de savoir si deux énoncés sont égaux.
Ce qui peut être important,
c'est de savoir si deux énoncés sont **équivalents**.

Le quantificateur universel booléen

Exemple d'énoncé "universel booléen" vrai

$$\forall b : \mathbb{B}, F \Rightarrow b.$$

Exo 7

Donnez la carte de visite du quantificateur universel booléen.

Le sens de la quantification universelle

Exemple

Quand on dit “pour tout entier n, $n^3 + 3n^2 + 2n$ est divisible par 6”, on veut dire que tous les énoncés suivants sont vrais :

- (pour $n = 0$:) 0 est divisible par 6
- (pour $n = 1$:) 6 est divisible par 6
- (pour $n = 2$:) 18 est divisible par 6
- etc

Un énoncé universel

peut donc condenser une infinité d'énoncés plus simples.

Les quantificateurs existentiels

Le quantificateur existentiel, c'est

il existe, alias $\exists$. On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur existentiel est un énoncé existentiel. Comme pour les universels, il y a un quantificateur existentiel par ensemble.
On note très provisoirement $\exists_E$ le quantificateur existentiel pour l'ensemble E.

Le quantificateur existentiel réel

Le quantificateur existentiel réel

a pour carte de visite :

$$\begin{array}{rccl} \forall_{\mathbb{R}} : & (\mathbb{R} \to \mathit{Prop}) & \to & \mathit{Prop} \\ & P & \mapsto & \exists_{\mathbb{R}} P \\ & P & \mapsto & \exists x : \mathbb{R}, P(x). \end{array}$$

Exemple d'énoncé "existentiel"

$$\exists x : \mathbb{R}, x^4 - 1000x^3 + \pi x^2 - x = 3.$$

Quantification existentielle et liaison

Dans $\exists x : E, P(x)$

la variable x est liée.
Les énoncés

$$\exists x : E, P(x)$$

et

$$\exists y : E, P(y)$$

sont égaux
(mais on s'en fout).

Le sens de la quantification existentielle

Exemple

Quand on dit

$$\text{“il existe un entier } n \text{ vérifiant } (n+2)^{1000} \leq 2^n\text{”},$$

on veut dire qu'au moins un des énoncés suivants est vrai :

- (pour $n = 0$:) $2^{1000} \leq 1$
- (pour $n = 1$:) $3^{1000} \leq 2$
- (pour $n = 2$:) $4^{1000} \leq 4$
- (pour $n = 3$:) $5^{1000} \leq 8$
- etc

Dans un tel exemple, on saurait trouver un entier n explicite ayant cette propriété, par exemple $n := 10^6$, mais on se fiche de la valeur exacte, et on préfère la désigner par un nom court.

Bilan

Tous les énoncés s'obtiennent

- à partir des énoncés de base (V, F, égalités, inégalités)
- avec des connecteurs binaires
- et/ou des quantificateurs.

Ce n'est pas tout-à-fait vrai

à cause des définitions, dont on va parler bientôt.
Ce qui est vrai, c'est qu'un énoncé **explicite** est de l'une des formes indiquées plus haut.
Un énoncé explicite est un énoncé qui ne sollicite aucune définition.
Tout énoncé est équivalent (égal ?) à un énoncé explicite, qui s'obtient en remplaçant tous les noms par leur valeur.

Empilement de quantificateurs

On peut enchainer les quantificateurs, exemples :

- $\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$
- (qu'on peut raccourcir en $\forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$)
- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$.

Quand on enchaine plusieurs quantificateurs

si on permute un $\forall$ et un $\exists$, ça risque de changer le sens.

Exemple

- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$ est faux tandis que
- $\forall x : \mathbb{R}, \exists M : \mathbb{R}, e^x \leq M$ est vrai (prendre $M := e^x$).

En revanche on peut permuter deux $\forall$ ou deux $\exists$

$\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$ et
$\forall y : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$ sont équivalents.

Langage naturel et langage formel

On est habitués aux énoncés en langage naturel

Il faut savoir les traduire en langage formel.

Exemple

n est pair $\Leftrightarrow \exists p : \mathbb{Z}, n = 2p$.

Exo 8

Donnez une traduction formelle de n est impair.

Exemples

Autres exemples

- pour n suffisamment grand, u_n est positif
- f garde un signe fixe sur I
- tout entier est somme de quatre carrés
- u_n tend vers 297 quand n tend vers l'infini
- f respecte les combinaisons linéaires.

La négation

On a une négation pour les énoncés

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{rccc} non : & Prop & \longrightarrow & Prop \\ & P & \longmapsto & \overline{P} \end{array}$$

Le calcul de la négation

la négation d'un énoncé s'obtient en appliquant les règles suivantes

- $\overline{V} = F, \quad \overline{F} = V, \quad \overline{x \leq y} = y < x, \quad \overline{x < y} = y \leq x.$
- $\overline{A \text{ and } B} = \overline{A} \text{ or } \overline{B} \quad \overline{A \text{ or } B} = \overline{A} \text{ and } \overline{B} \quad \overline{A \Rightarrow B} = A \text{ and } \overline{B}$
- $\overline{\forall x : E, P(x)} = \exists x : E, \overline{P(x)}, \quad \overline{\exists x : E, P(x)} = \forall x : E, \overline{P(x)}.$

Exemple

La négation de $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$

est $\forall M : \mathbb{R}, \exists x : \mathbb{R}, M < f(x).$

Exo 9

Calculer la négation de $\forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$