MatDis Résumé4 # Enoncés 03/09 L1M

## 1 Enoncés et booléens

Les booléens ne sont que deux, trop facile. Des énoncés, il y en a beaucoup plus. par exemple "V $\Longrightarrow$F" et "V et F" sont deux énoncés différents, même si tous les deux "sont" faux. Les énoncés sont un peu comme des formules pour les booléens : on a bien compris que $2+2$ et $3+1$ sont deux formules différentes pour le même nombre 4. Eh bien V $\Longrightarrow$F et V et F sont deux énoncés différents pour le même booléen F.

On note *Prop* l'ensemble de tous les énoncés.

## 2 Connecteurs et énoncés

Pour faire nos énoncés, on dispose déjà des booléens, V et F, qui ne sont pas très intéressants. Après, on dispose des connecteurs qu'on a déjà vu pour les booléens :

$$\text{non} : Prop \to Prop$$

$$\text{et, ou}, \Longrightarrow, \Leftrightarrow : Prop \times Prop \to Prop.$$

Rien qu'avec ça, on peut comprendre la distinction entre booléens et énoncés : la réciproque d'un booléen, ça n'existe pas, ou plus précisément les experts ne la définissent pas. En revanche ils définissent éventuellement la réciproque d'un énoncé par exemple de la forme $A \Longrightarrow B$, et c'est $B \Longrightarrow A$.

$$recip : Prop \to Prop_{\perp}.$$

En principe on se fiche de savoir si deux énoncés sont égaux ou pas. La bonne question est plutôt de savoir s'ils sont **équivalents** ou pas. Deux énoncés $A$ et $B$ sont dits équivalents si l'énoncé $A \Leftrightarrow B$ est vrai. On discutera plus tard cette question de vérité.

## 3 Quantificateurs

Le truc sérieux pour faire des énoncés, c'est les quantificateurs. Y'en a que deux, enfin en première approximation. En réalité, il y en a plutôt deux par ensemble, comme on va le voir. Le premier quantificateur ($\forall$) permet de formuler (puis prouver) une infinité d'énoncés d'un seul coup. Le second ($\exists$) n'est pas mal non plus.

Quelque soit ($\forall$). C'est le plus intuitif des deux. Pour l'ensemble $\mathbf{R}$ par exemple, on a le quantificateur $\forall_{\mathbf{R}} : (\mathbf{R} \to Prop) \to Prop$. Par exemple, dans un contexte avec une fonction $f$ et un nombre $M$, on peut former l'énoncé

$$\forall_{\mathbf{R}}(x \mapsto f(x) < M),$$

qu'on écrit en réalité

$$\forall x : \mathbf{R}, f(x) < M$$

et qu'on lit "quelque soit le réel $x$, $f(x)$ est inférieur à $M$". Et, de même que pour $x \mapsto f(x) < M$, on peut remplacer la variable liée $x$ par n'importe quelle autre variable disponible : les deux énoncés $\forall x : \mathbf{R}, f(x) < M$ et $\forall y : \mathbf{R}, f(y) < M$ sont égaux. Et en effet, on peut, mais c'est malcommode, exprimer cet énoncé sans utiliser de variable : "en tout nombre réel, la valeur de $f$ est inférieure à $M$".

Le sens de l'énoncé $\forall x : E, P(x)$ est qu'en tout élément de $E$, la propriété $P$ est vraie. autrement dit, l'énoncé en question "est vrai" lorsque tout élément de $E$ vérifie la propriété $P$. On reviendra plus loin sur cette question de vérité.

Il existe ($\exists$). Il est un peu moins courant que le précédent et, de ce fait, moins bien compris. Pour l'ensemble $\mathbf{R}$ par exemple, on a le quantificateur $\exists_{\mathbf{R}} : (\mathbf{R} \to \mathit{Prop}) \to \mathit{Prop}$. Par exemple, dans un contexte avec une fonction $f$ et un nombre $M$, on peut former l'énoncé $\exists_{\mathbf{R}}(x \mapsto f(x) < M)$, qu'on écrit en réalité $\exists x : \mathbf{R}, f(x) < M$ et qu'on lit "il existe un réel $x$, tel que $f(x)$ soit inférieur à $M$". Et, de même que pour $\forall$, on peut remplacer la variable liée $x$ par n'importe quelle autre variable disponible : les deux énoncés $\exists x : \mathbf{R}, f(x) < M$ et $\exists y : \mathbf{R}, f(y) < M$ sont égaux. Et comme pour $\forall$, on peut exprimer cet énoncé sans utiliser de variable : "en au moins un nombre réel, la valeur de $f$ est inférieure à $M$".

Le sens de l'énoncé $\exists x : E, P(x)$ est donc qu'au moins un élément de $E$ vérifie la propriété $P$. Dans le langage des étudiants, pour démontrer cet énoncé, il suffit de trouver un exemple, alors que pour $\forall x : E, P(x)$, il faut traîter tous les cas.

Dans un énoncé, l'ordre des quantificateurs "distincts" est essentiel :

$$\forall x : \mathbf{R}, \forall y : \mathbf{R}, x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$$

et

$$\forall y : \mathbf{R}, \forall x : \mathbf{R}, x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$$

sont équivalents.

mais

$\forall x : \mathbf{R}, \exists M : \mathbf{R}, f(x) \leq M$ et $\exists M, \forall x : \mathbf{R}, f(x) \leq M$ ne le sont pas du tout. Par exemple si $f$ est la fonction exponentielle, le premier est vrai ("prendre" $M := e^x$), tandis que le second est faux (il faudrait "choisir" ou "prendre" $M$ avant de connaître $x$).

# 4 Négation

Facile.

# 5 Vérité

On aimerait pouvoir dire que tout énoncé est soit vrai soit faux, mais ce n'est pas si simple. A défaut de notion de vérité plus satisfaisante, on peut dire qu'un énoncé est vrai s'il admet une preuve (on va expliquer comment faire les preuves), et qu'il est faux si sa négation est vraie. En ce sens, on sait depuis bientôt un siècle, grâce à Gödel, que certains énoncés ne sont ni vrais ni faux. Et ces énoncés "indécidables" ne sont pas forcément si compliqués que ça. En voici un célèbre, c'est l'Hypothèse du Continu, formulée (autrement) par Cantor :

$\forall P \subset \mathbf{R}, (\exists u : \mathbf{N} \to P, u\ \mathit{surjective})\,\mathrm{ou}\,\exists f : \mathbf{R} \to P, f\ \mathit{injective}.$

Ce qui est troublant, c'est qu'à côté de ça, dans notre logique, pour tout énoncé $P$, l'énoncé $P\,\mathrm{ou}\,\mathrm{non}\,P$ est vrai (c'est l'axiome du tiers-exclu). Ca révèle un léger décalage entre "$A\,\mathrm{ou}\,B$ est vrai" et "$A$ est vrai ou $B$ est vrai", autrement dit un léger décalage entre le "ou" du langage courant et le "ou" mathématique.

# 6 Tactiques de base

Facile.