Ensembles

Dédou

Mars 2010

Comment écrit-on les réels ?

Pour l'écriture des réels, on a donné

- des réels de base ($0, \ 1, \ e, \ \pi ...$)
- des constructions élémentaires pour former de nouveaux réels ($+, \ -, \ \times, \ $, exp, ln, cos)
- des constructions plus subtiles (limite, intégrale, borne supérieure).

Exo 1

Donnez votre réel favori.

Comment écrit-on les fonctions ?

On a fait pareil pour les fonctions, avec

- des fonctions de base (identité, $\cos$, $\sin$, $\exp$, $\ln \ldots$)
- des constructions élémentaires pour former de nouvelles fonctions ($+$, $-$, $\times, \circ \ldots$)
- des constructions plus subtiles (dérivée, primitives ...).

Exo 2

Donnez votre fonction favorite.

Comment écrit-on les énoncés ?

On a défini les énoncés en donnant

- des énoncés de base (V, F, $=$, $, \leq$ ...)
- des constructions élémentaires pour former de nouveaux énoncés (and , or , $\Rightarrow$)
- des constructions plus subtiles ($\forall$, $\exists$).

Exo 3

Donnez votre énoncé favori.

Comment écrit-on les ensembles ?

On va dire comment écrire des ensembles en donnant

- des ensembles de base
- des opérations élémentaires pour former de nouveaux ensembles
- des constructions plus subtiles.

Exo 3

Donnez votre ensemble favori.

Les ensembles de base

Voici nos ensembles de base

- l'ensemble vide $\emptyset$
- l'ensemble à un élément $\{\emptyset\}$ (on peut donner le nom qu'on veut à son unique élément)
- l'ensemble $\mathbb{B}$ des booléens
- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

En vrai

On sait définir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{N}$, et même on sait (plus ou moins) définir tout à partir de $\emptyset$, mais ce n'est pas à notre programme.

Première opération : l'union disjointe d'ensembles

Voici la carte de visite de l'union disjointe

$$\begin{array}{rccl} \amalg : & Ens \times Ens & \rightarrow & Ens \\ & (A, B) & \mapsto & A \amalg B \\ & (A, B) & \mapsto & \{(1, a) | a \in A\} \cup \{(2, b) | b \in B\} \end{array}$$

Exo 4

Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathbb{B} \amalg \mathbb{B}$?

Intermède : le cardinal

Exemple

On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \amalg \{\infty\}$.

Voici la carte de visite du cardinal

$$\begin{array}{cccl} card: & Ens & \rightarrow & \overline{\mathbb{N}} \\ & A & \mapsto & \#A \\ & A & \mapsto & sup\{n:\mathbb{N} | \exists f:[1..n] \rightarrow A, f \ \ injective\} \end{array}$$

Exo 5

a) Combien vaut $\#(\mathbb{B} \amalg \mathbb{B})$?
b)Combien vaut $\#(A \amalg B)$?
c) Combien vaut $\#\mathbb{N}$?
d) Quelle est la convention pour $[1, 0]$ ici ?

Deuxième opération : le produit d'ensembles

Voici la carte de visite du produit

$$\begin{array}{rrcl} \times : & Ens \times Ens & \longrightarrow & Ens \\ & (A, B) & \mapsto & A \times B \\ & (A, B) & \mapsto & \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \end{array}$$

Exo 6

a) Combien vaut $\#(\mathbb{B} \times \mathbb{B})$?
b) Combien vaut $\#(A \times B)$?

Les deux projections d'un produit

Pour chaque produit d'ensembles il y a deux projections

Voici la carte de visite de la première projection du produit de A par B

$$\begin{array}{rccl} proj_1 : & A \times B & \longrightarrow & A \\ & (a,b) & \longmapsto & proj_1(a,b) \\ & (a,b) & \longmapsto & a. \end{array}$$

Exo 7

Ecrivez la carte de visite de la seconde projection du produit de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{B}$.

Intermède : $\mapsto$ sur un produit

Pour nos fonctions linéaires de deux variables

- on écrit sans état d'âme $f := (x, y) \mapsto 2x + 3y$.
- or on a dit que, devant un mapsto, on met une variable
- et (x, y) n'est pas une variable.
- C'est qu'on fait la convention que par exemple $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ est un raccourci pour $z \mapsto 2proj_1(z) + 3proj_2(z)$.

Exo 8

Donnez la forme conventionnelle pour $z \mapsto proj_1(z)(proj_2(z) - (proj_2(z))^2$.

Troisième opération : l''exponentiation d'ensembles

Voici la carte de visite de cette exponentiation

$$\begin{array}{rccl} Exp : & Ens \times Ens & \longrightarrow & Ens \\ & (A, B) & \longmapsto & B^A \\ & (A, B) & \longmapsto & A \longrightarrow B \end{array}$$

Cette construction est tellement importante qu'

on a deux façons de la noter (on en a profité pour ne pas donner de formule ; on reviendra sur cette définition plus loin).

Exo 9

a) Combien vaut $\#(\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B})$?
b) Combien vaut $\#B^A$?

Les parties

Comme construction subtile d'ensembles

On a la construction des parties.
Ca mérite un chapitre entier....

Exo 10

Donnez votre partie favorite de $\mathbb{R}^2$.