MatDis Résumé8 **Les ensembles finis** 04/09 L1M

Les ensembles finis

La définition des ensembles finis est un bon exemple de définition pas facile à choisir. Une bonne façon de régler ce type de choix consiste à prouver d'entrée que certaines propriétés qu'on a envie de prendre comme définition sont équivalentes. Après ça, chacun peut retenir la définition qui a sa préférence.

Proposition 1 *Soit E un ensemble quelconque. Les propriétés suivantes sont pratiquement équivalentes.*

1. *Toute injection de E dans E est surjective*
2. *Toute surjection de E sur E est injective*
3. *Toute surjection d'une partie de E sur E est injective*
4. *Pour toute partie P de E, toute injection de P dans P est surjective*
5. *Pour toute partie P de E, toute surjection de P sur P est injective*
6. *Pour toute partie P de E distincte de E, toute injection de P dans P est surjective*
7. *Pour toute partie P de E distincte de E, toute surjection de P sur P est injective*
8. *Il existe un élément x de E tel que toute injection de $E - \{x\}$ dans $E - \{x\}$ soit surjective*
9. *Il existe un élément x de E tel que toute surjection de $E - \{x\}$ dans $E - \{x\}$ soit injective*
10. *Pour tout x de E, toute injection de $E - \{x\}$ dans $E - \{x\}$ est surjective*
11. *Pour tout x de E, toute surjection de $E - \{x\}$ sur $E - \{x\}$ est injective*
12. *Aucune application de $\mathbf{N}$ vers E n'est injective*
13. *Aucune application de E vers $\mathbf{N}$ n'est surjective*
14. *Aucune application de $\mathbf{N}$ vers une partie de E n'est injective*
15. *Aucune application d'une partie de E vers $\mathbf{N}$ n'est surjective*
16. *Il existe un entier n et une surjection de $[1..n]$ sur E*
17. *Il existe un entier n et une injection de E dans $[1..n]$*
18. *Il existe un entier n et une bijection de E vers $[1..n]$.*

On ne va pas discuter ces 306 implications mais plutôt considérer ça comme une mine d'exercices, dont certains sont faciles, et d'autres franchement injouables.

Ce qu'on va faire (page suivante) c'est démontrer que la dernière propriété implique la première. Et même pas. On va juste traîter le cas où E égale $[1..n]$ (la bijection requise est l'identité).

Exercice 2

1. *Trouver les huit implications les plus faciles*
2. *Détailler la preuve de l'une d'elles*
3. *Trouver les intrus et corrigez-les.*

Proposition 3 *Soit n un entier naturel. Toute injection de $[1..n]$ dans $[1..n]$ est surjective.*

Preuve.
On raisonne par récurrence sur n [induction].

- Le cas $n = 0$ est facile : soit f une application (injective) de l'ensemble vide ($[1..0]$) dans lui-même (c'est forcément le graphe vide). On doit montrer $\forall x \in [1..0], \ldots$ et ça c'est "évident" : soit $x \in [1..0]$. On a donc $x \leq 0$ donc $x < 1$, et aussi $1 \leq x$, ce qui est absurde [absurde].
- Maintenant on traîte le cas $n + 1$ en supposant connu le cas n. On traîte d'abord le cas particulier où l'injection f donnée vérifie $f(n + 1) = n + 1$ [observer].
  - Soit donc [$\forall, \Longrightarrow$] y dans $[1..n + 1]$ [$\forall$] : on lui cherche un antécédent par f. Si y égale $n + 1$ [distinguer], il admet évidemment l'antécédent $n + 1$ [$\exists$]. Dans le cas contraire, on observe que f induit une application f' de $[1..n]$ dans $[1..n]$ [définition puis typage], et que f' est injective [observer]. D'après l'hypothèse de récurrence [appliquer], f' est surjective [observer] et donc [observer, appliquer] y admet un antécédent par f'. Cet antécédent [$\exists$] est aussi un antécédent de y par f [$\exists$].
  - Il ne nous reste qu'à traîter le cas d'une application $f : [1..n + 1] \to [1..n + 1]$ injective [$\forall, \Longrightarrow$] avec $f(n + 1)$ différent de $n + 1$ [distinguer, appliquer].
    Pour montrer que f est surjective, on introduit $t : [1..n+1] \to [1..n+1]$ la transposition qui échange $f(n + 1)$ et $n + 1$, et $g : [1..n + 1] \to [1..n + 1] := t \circ f$ [définition]. On a $f = t \circ g$ [observer] et donc [réécrire], comme t est surjective, il nous suffit de montrer que g l'est [appliquer]. On observe [observer] que g est injective (comme composée de deux applications injectives [appliquer]) et envoie $n + 1$ sur lui-même. Sa surjectivité découle donc du cas particulier traîté plus haut [appliquer].

Exercice 4
1. *Expliciter les arguments des tactiques qui en demandent*
2. *Indiquer les buts laissés au lecteur*
3. *Faire la preuve de l'énoncé obtenu en échangeant injectif et surjectif.*