

Objectifs et tactiques

Dédou

Mars 2010

On passe aux preuves

On a vu

les définitions et les énoncés.

Il nous reste à voir

les preuves.

Preuve et démonstration

c'est la même chose.

Objectifs

A la base

on veut prouver un énoncé.

Au final

on veut prouver un énoncé E dans un contexte C .

Définition

Un objectif, c'est un contexte muni d'un énoncé (bien défini dans ce contexte) qu'on appelle le but.

Exemple

$x : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, H : x \leq y \vdash x^2 \leq y^2$.

(on aura du mal à prouver celui-là !)

Le symbole \vdash qui sépare le contexte du but se lit "thèse".

Questions de validité I

Une condition nécessaire de validité :

pour que l'énoncé E soit bien défini (on dit aussi "valide") dans le contexte C , il faut au moins que toutes les variables libres dans E soient déclarées dans C .

Exemple

L'énoncé $x = y + 2k\pi$ n'est pas valide dans le contexte $x : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, Hc : \cos x = \cos y, Hs : \sin x = \sin y$.

Exo 1

Corrigez l'énoncé ci-dessus pour qu'il devienne bien défini et même vrai dans le contexte donné.

Questions de validité II

La condition nécessaire de validité qu'on vient de voir
n'est pas suffisante.

C'est à cause des fonctions partielles.

Exemple

Dans le contexte $x : \mathbb{R}$, $H : x < 0$, on n'a pas trop envie de dire que l'énoncé $\ln x = \sqrt{x}$ est valide.

Questions de validité III

En fait, le contexte spécifie un ensemble (l'ensemble des valeurs possibles pour les variables) sur lequel l'énoncé est une fonction (à valeurs dans Prop) qui doit être partout définie.

Dans l'exemple

Dans le contexte $x : \mathbb{R}, H : x < 0 \vdash \ln x = \sqrt{x}$, le problème est que la fonction

$$x \mapsto \ln x = \sqrt{x}$$

n'est pas partout définie sur l'ensemble spécifié par le contexte, à savoir :

$$\{x : \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Tactiques

Une tactique, c'est un schéma de gestion d'objectif autorisée.

Une tactique s'applique à certains objectifs mais pas à d'autres.

Une tactique peut transformer un objectif en zéro, un ou plusieurs nouveaux objectifs.

Si une tactique ne transforme pas son objectif initial en zéro objectif

elle est censée au moins le "réduire" en un ou plusieurs objectifs "plus simples".

On va donner la liste des tactiques (gestions autorisées).

En gros, une preuve d'un objectif O , c'est une liste de tactiques qui, appliquées l'une après l'autre, réduisent l'objectif initial à zéro objectif.

Quand on fait une preuve, on gère une pile d'objectifs.

- Au départ de la preuve d'un énoncé E , la pile contient un seul objectif, dont le contexte est vide, et le but est E .
- La preuve consiste à appliquer des tactiques à l'objectif courant, le premier de la pile.
- Chaque tactique modifie l'objectif courant, et éventuellement la pile.
- La preuve est finie quand la pile est vide.

Que dire sur chaque tactique ?

Pour chaque tactique, on va dire

- son sens
- à quels objectifs elle s'applique
- ses arguments éventuels
- comment elle transforme la pile d'objectifs
- si elle est "gratuite" ou non
- comment elle se rédige.