Bornes pour les parties de $\mathbb{N}$

Dédou

Avril 2010

Parties non vides de $\mathbb{N}$

Notation

On va noter $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$.

Minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$

Voici la carte de visite de ce minimum

$$\begin{array}{rccl} \min : & \mathcal{P}^*(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & P & \longmapsto & \min(P) \end{array}$$

Pour la formule, voir plus bas.

Définition du minimum

Voici ce qu'on a l'habitude de dire

Soit P une partie non vide de $\mathbb{N}$. Alors P admet un élément plus petit que tous les autres, qu'on appelle $\min P$.

Ce qu'il faut comprendre :

- $\min = \{(P, m) : \mathcal{P}^*(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} | m \in P \text{ et } \forall n : P, m \leq n\}$.
- Cette relation de $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$ est une application.

Bien entendu il faut démontrer le second point, à savoir :

- Version naturelle : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un élément plus petit que tous les autres.
- Version formelle : $\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$ si P est non vide alors $\exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p$.

Preuve de

$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$ si P est non vide alors
$\exists! m : \mathbb{N}, m \in P$ et $\forall p : P, m \leq p.$

Ce qu'on dit

On montre par récurrence sur n que si $P \cap [0..n]$ est non vide, alors P admet un élément plus petit que tous les autres.
Pour $n = 0$, on voit que 0 est dans P et il est évidemment plus petit que tout autre élément de P.
Pour n quelconque, si P admet un élément plus petit que n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Dans le cas contraire, comme P contient un élément inférieur à $n + 1$, on voit que cet élément ne peut être que $n + 1$ et qu'il est inférieur à tous les autres éléments de P.

La preuve

On veut raisonner par récurrence mais

notre énoncé ne commence pas par $\forall n$...
Alors on en forge un autre R plus fort.
C'est la tactique Observer, il faudra prouver R et $R \Rightarrow E$.
Pour R,on prend
$\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$

$$P \cap [0..n] \text{ non vide} \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p.$$

Preuve de $R \Rightarrow E$

$$(\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$
$$P \cap [0..n] \text{ non vide} \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p)$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}), P \text{ non vide} \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p.$$

Preuve

ImpB, ForallB (P), ImpB, ReecC (est non vide), ExistC(n), ForallC[n], ForallC[P], ImpC, ReecC (est non vide), ExistB[n], ReecB($\cap$), EtB, Hyp, Facile ($n \in [0..n]$) .....

Exercice

a) Trouvez la faute de frappe dans la preuve précédente.
b) Ecrivez l'objectif courant après ce début de preuve, et la tactique qui le torche.

Preuve de R'

$\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N})$, si $P \cap [0..n]$ est non vide alors
$\exists m : \mathbb{N}, m \in P$ et $\forall p : P, m \leq p$.

La preuve

Rec,
ForallB (P), ImpB, ExistB[0], ReecC(est non vide), ExistC(t),
ReecC($\cap$), ReecC($\in [0..0)$), RessC($t \leq 0 \Rightarrow t = 0$), ReecB(t=0),
EtB, Hyp, ForallB(p), RessB($0 \leq t$)
ForallB(n), ImpB, ForallB(P), ForallC[P], ImpB,
Selon[$P \cap [0..n]$ non vide],
1-ImpC, Hyp, Hyp
2- ReecC(est non vide), ExistC(t), ReecC($\cap$), EtC, ExistB[t], EtB,
Hyp, ForallB(p), ForallC[p] ...

Exercice

Ecrivez l'objectif courant après ce début de preuve.

Les propriétés caractéristiques du minimum

Proposition

Si P est une partie non vide de $\mathbb{N}$, alors $\min P$ est dans P et tout élément de P lui est supérieur.

Et maintenant le maximum

Et maintenant le maximum !

Parties bornées de $\mathbb{N}$

Notation

On va noter $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties majorées de $\mathbb{N}$ (f comme finies, les parties bornées sont les parties finies...) et $\mathcal{P}_f^*(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties majorées non vides de $\mathbb{N}$.

Maximum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$

Voici la carte de visite de ce maximum

$$\max : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f^*(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ P & \longmapsto & \max(P) \end{array}$$

Pour la formule, voir plus bas.

Définition du maximum

Voici ce qu'on a l'habitude de dire

Soit P une partie majorée non vide de $\mathbb{N}$. Alors P admet un élément plus grand que tous les autres, qu'on appelle $\max P$.

Ce qu'il faut comprendre :

- $\max = \{(P, m) : \mathcal{P}_f^*(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} | m \in P \text{ et } \forall n : P, m \geq n\}$.
- Cette relation de $\mathcal{P}_f^*(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$ est une application.

Et comme pour le min il faut démontrer le second point, à savoir :

- Version naturelle : toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ admet un élément plus grand que tous les autres.
- Version formelle : $\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N})$,
  $$P \text{ non vide et majorée} \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p.$$

Preuve de

$$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$
$$P \text{ non vide et majorée} \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p.$$

Ce qu'on dit

On montre par récurrence sur n que si P est non vide et majoré par n, alors P admet un élément plus grand que tous les autres.
Pour $n = 0$, on voit que 0 est le seul élément de P et donc aussi le plus grand.
Pour n quelconque, si P ne contient pas $n + 1$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Dans le cas contraire, $n + 1$ est évidemment le plus grand élément de P.

Une preuve plus formelle

$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$
$$P \text{ non vide et majorée} \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p.$$

On veut raisonner par récurrence mais

notre énoncé ne commence pas par $\forall n$... Alors va en forger un autre R plus fort. Cette fois, on fait d'abord
ForallB, ImpB, EtC, ReecC(non vide), ExistC(t), ReecC(majorée), ExistC(M) ce sera un peu plus simple.
Et après, on fait Observer
$\forall n : \mathbb{N}, P \text{ majorée par } n \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p.$

Preuve que R gagne

$(\forall n : \mathbb{N}, \;\; \text{si} \;\; P \text{ majorée par } n \Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p)$
$\Rightarrow \exists! m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p.$
(on sait que P est non vide et majorée par M)

Preuve

ForallC[M], ImpC, Hyp, Hyp

Preuve de R'

$\forall n : \mathbb{N}, P$ majorée par $n \Rightarrow \exists m : \mathbb{N}, m \in P$ et $\forall p : P, m \geq p$.
(on sait que P est non vide et contient t)

La preuve

Rec,

ImpB, ReecC (majorée par), ExistB[t], EtB, Hyp, ForallB(p), ForallC(p), Facile($p \leq 0 \Rightarrow p \leq t$),

ForallB(n), ImpB, ImpB, Selon[$n+1 \in P$],

1-ExistB[n+1], EtB, Hyp, ForallB(p), ReecC(majorée par $n+1$), ForallC(p), Hyp,

2- ImpC, ReecB (majorée par n), ForallB(p), ImpB, RessB ($p \leq n+1$ et $p \neq n+1 \Rightarrow p \leq n$), EtB, Hyp, Contra($n+1 \notin P$), ReecB ($p = n+1$), Hyp

Les propriétés caractéristiques du maximum

Proposition

Si P est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, alors $\max P$ est dans P et tout élément de P lui est inférieur.

La borne supérieure

Voici la carte de visite de la borne supérieure

$$
\begin{array}{rccl}
sup : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow & \overline{\mathbb{N}} \\
 & P & \mapsto & \begin{array}{ll} \text{si} \ \ P \ \mathrm{est\ vide} & \\ \text{alors} \ \ 0 & \\ \text{sinon} & \begin{array}{l} \text{si} \ \ P \ \mathrm{est\ major\acute{e}e} \\ \text{alors} \ \ max(P) \\ \text{sinon} \ \ +\infty \end{array} \end{array}
\end{array}
$$

Rappel

$\overline{\mathbb{N}}$ c'est $\mathbb{N}$ avec un élément $+\infty$ en plus : $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \amalg \{+\infty\}$.

Propriété caractéristique de la borne supérieure I

Proposition

Si P est une partie quelconque de $\mathbb{N}$, alors $supP$ est le plus petit des majorants de P (dans $\overline{\mathbb{N}}$).

Autrement dit

Pour prouver $supP = M$, il suffit de prouver

$$(\forall p : P, p \leq M) \text{ et } \forall M' : \overline{\mathbb{N}}, (\forall p : P, p \leq M') \Rightarrow M \leq M'.$$

Ou encore, en contraposant

Pour prouver $supP = M$, il suffit de prouver

$$(\forall p : P, p \leq M) \text{ et } \forall M' : \mathbb{N}, M' < M \Rightarrow \exists p : P, p > M'.$$

Propriété caractéristique de la borne supérieure II

Proposition

Si P est une partie quelconque de $\mathbb{N}$, alors *supP* est caractérisé par la propriété :

$$\forall y : \overline{\mathbb{N}}, y \geq supP \Leftrightarrow \forall p : P, y \geq p.$$

Autrement dit

Pour prouver $supP = M$, il suffit de prouver

$$\forall y : \overline{\mathbb{N}}, y \geq M \Leftrightarrow \forall p : P, y \geq p.$$

La borne inférieure

Voici la carte de visite de la borne inférieure

$$\begin{array}{rccl} \textit{inf} : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{N}} \\ & P & \longmapsto & \begin{array}{ll} \text{si} & P \text{ est vide} \\ \text{alors} & +\infty \\ \text{sinon} & \min P \end{array} \end{array}$$

Borne supérieure et inclusion

La borne supérieure est croissante.

Nécessite d'étendre $\leq$ à $\overline{\mathbb{N}}$.

$$
\begin{array}{rccl}
\leq: & \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{B} \\
& (x, y) & \mapsto & \begin{array}{ll}
\text{si} \quad y = +\infty & \\
\text{alors} \quad V & \\
\text{sinon} & \begin{array}{l}
\text{si} \quad x = +\infty \\
\text{alors} \quad F \\
\text{sinon} \quad x \leq y
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Borne supérieure et réunion

La borne supérieure de la réunion est le max des bornes supérieures.

Nécessite d'étendre max à $\overline{\mathbb{N}}$.

Exercice

Etendre max à $\overline{\mathbb{N}}$.

Borne supérieure et intersection

La borne supérieure d'une intersection est inférieures aux deux bornes supérieures.

Exercice

Prouver ça avec et sans ressource.

Borne supérieure et addition

La borne supérieure d'une somme est la somme des bornes supérieures.

Problème

Il faut définir la somme des parties et étendre la somme à $\overline{\mathbb{N}}$.

Borne inférieure et inclusion

Exercice

Enoncez et démontrez ce qui se passe entre borne inférieure et inclusion.

Problème

Il faut définir la somme des parties et étendre la somme à $\overline{\mathbb{N}}$.