Ensembles et parties

1 Ensembles et réels :même combat

Pour les nombres réels, on a vu qu'on a des constantes, genre $e \in \mathbf{R}$ et $\pi \in \mathbf{R}$ et des constructions, genre $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ou $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et mêmes des constructions plus subtiles comme $\int : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \to \mathbf{R}) \to \mathbf{R}_{\perp}$.

Eh ben pour les ensembles c'est pareil. On a des constantes, genre $\mathbf{R}$: *Ens* et $\mathcal{B}$: *Ens* et des constructions comme $\amalg : Ens \times Ens \to Ens := (E, F) \mapsto E \amalg F$, ou $\times : Ens \times Ens \to Ens := (E, F) \mapsto E \times F$ ou encore $\to: Ens \times Ens \to Ens := (E, F) \mapsto E \to F$.

La différence avec les réels c'est que pour les ensembles il faut aussi dire quels sont leurs éléments. Par exemple si E et F sont deux ensembles, les éléments de $E \times F$ sont les couples (e, f) constitués d'un élément e de E et d'un élément f de F, tandis que les éléments de $E \to F$ sont les applications de E dans F.

2 Les parties

Et alors on a une construction plus subtile. Elle n'a pas vraiment de nom, nous on va l'appeler support. En fait il y a une construction $support_E$ pour chaque ensemble E.

2.1 Le cas des parties de R

Voyons comment marche $support_{\mathbf{R}}$: intuitivement, ça attend une propriété sur $\mathbf{R}$ et ça fabrique l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}$ vérifiant cette propriété. Formellement, ça donne :

$support_{\mathbf{R}} : (\mathbf{R} \to \mathcal{B}) \to Ens$
$\qquad P \mapsto \{x \in \mathbf{R} | P(x)\}$.

La dernière formule $\{x \in \mathbf{R}|P(x)\}$ se lit "l'ensemble des x de $\mathbf{R}$ vérifiant $P(x)$". La notation "lie" la variable x, ce qui veut dire que, dans cette formule, la seule variable libre est P. Comme d'habitude, le nom de la variable liée n'est pas significatif, autrement dit on a par exemle l'égalité

$\{x \in \mathbf{R}|P(x)\} = \{y \in \mathbf{R}|P(y)\}$.

Exemple : pour $P := x \mapsto 3 \leq x \leq 5$, on obtient $\{x \in \mathbf{R}|3 \leq x \leq 5\}$, en quoi on reconnaˆl'intervalle $[3, 5]$.

Les ensembles de la forme $\{x \in \mathbf{R}|P(x)\}$ sont appelées parties de $\mathbf{R}$. Ce sont donc les éléments de l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$, qu'on note $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

Comme ces parties sont des ensembles, on doit dire quels sont leurs éléments. Comme on l'a déjà plus ou moins dit, les éléments de $\{x \in \mathbf{R}|P(x)\}$ (pour $P : \mathbf{R} \to \mathcal{B}$ quelconque) sont les nombres réels x vérifiant $P(x)$. Autrement dit on a la règle d'explicitation suivante: pour tout a réel, et tout P dans $\mathbf{R} \to \mathcal{B}$,

$$a \in \{x \in \mathbf{R}|P(x)\} \iff P(a).$$

2.2 Le cas général

Si, dans cette histoire, on remplace $\mathbf{R}$ par n'importe quel ensemble E, ça se passe pareil

$support_E : (E \to \mathcal{B}) \to Ens$
$\qquad P \mapsto \{x \in E|P(x)\}$

Les éléments de $\{x \in E | P(x)\}$ (pour $P : E \to \mathcal{B}$ quelconque) sont les éléments x de E vérifiant $P(x)$. Et pour tout élément a de E, $a \in \{x \in E | P(x)\}$ s'explicite en $P(a)$.

Exemples : y'a toujours la partie vide $\emptyset_E := support_E(x \mapsto faux) = \{x \in E | faux\}$, qui ne comporte aucun élément; et la partie pleine $E = \{x \in E | vrai\}$.

3 L'appartenance

On écrit $a \in \mathbf{R}$ pour dire que a est un réel. En général, si on a écrit une formule a, soit on a respecté les règles de construction des réels, et la question $a \in \mathbf{R}$? ne se pose plus, soit on n'a pas respecté ces règles, et la question ne se pose pas non plus.

Ce n'est pas tout-à-fait vrai. Quand on fait les nombres complexes, on peut poser $a := (1 + i)z$ et se demander si a est réel. Dans ce contexte, on voit $\mathbf{R}$ comme une partie de $\mathbf{C}$. Ou ailleurs on peut poser $a := \lim_n u_n$, et se demander si a est bien réel. Cette fois, on voit $\mathbf{R}$ comme une partie de $\mathbf{R}_\perp$.

Ce qui est vrai, c'est que, si E est un ensemble, et qu'on se demande si un objet a est un élément de E, c'est toujours qu'on a un ensemble "plus gros" F en tête, dont E est une partie et a est un élément.

Tout ça pour dire qu'on a une construction $\in := \in_F$ par ensemble F, et qui marche comme suit:

$\in_F$: $F \times \mathcal{P}(F) \to \mathcal{B}$

$(a, A) \mapsto a \in A$

Et on répète l'équivalence fondamentale (pour a et P quelconques là où il faut) :

$a \in \{x \in F | P(x)\} \iff P(a)$.

4 L'inclusion

Parfois, au lieu d'écrire $A \in \mathcal{P}(E)$ on préférera écrire $A \subset E$, ce qui se lit "A est inclus dans E". En principe, pour deux ensembles quelconques A et B, on pourrait se demander si A est inclus dans B, mais, en pratique, lorsqu'on se pose la question $A \subset B$, on a en tête un ensemble "plus gros" F dont A et B sont des parties.

Tout ça pour dire qu'on a une construction $\subset := \subset_F$ par ensemble F, et qui marche comme suit:

$\subset_F$: $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{P}(\mathcal{F}) \to \mathcal{B}$

$(I, J) \mapsto I \subset J := \forall x \in F, x \in I \Longrightarrow x \in J$.

En français, ça donne: I est inclus dans J ssi tout élément de I est aussi élément de J.

On a donc la règle d'explicitation suivante (pour A et B là où il faut) :

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$$

5 Ma première preuve

Proposition : si F est un ensemble quelconque et P une partie de F, alors la partie vide de F est incluse dans P.

On veut montrer $\forall F : Ens, \forall P : \mathcal{P}(F), \emptyset_E \subset P$. Soit donc F un ensemble et P une partie de F. On doit montrer $\emptyset_E \subset P$, autrement dit $\forall x \in F, x \in \emptyset_E \Longrightarrow x \in P$. Soit donc x dans F. On doit montrer $x \in \emptyset_E \Longrightarrow x \in P$, ce qui se réécrit en $faux \Longrightarrow x \in P$ et donc en $vrai$.

Qed.

Rappel : $\Longrightarrow$: $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est une opération sur les booléens, qui est décrite par la table de ses quatre valeurs (de vérité).

6 Autres constructions de parties

6.1 L'image

Le cas de $\mathbf{R}$ (et $\mathbf{R}$): Pour $f : \mathbf{R} to \mathbf{R}$, on pose

$\operatorname{Im} f := \{y \in \mathbf{R} | \exists x \in \mathbf{R}, y = f(x)\}$.

Et comme on trouve que c'est trop long, on choisit une notation plus courte; on pose

$\{f(x) | x \in \mathbf{R}\} := \operatorname{Im} f$.

Cete notation est très piégieuse, parce qu'elle ressemble à celle pour les parties, et il faut donc bien voir la différence.

On peut aussi par exemple prendre l'image d'une application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Cette fois,

$\operatorname{Im} f := \{z \in \mathbf{R} | \exists x, y \in \mathbf{R}, y = f(x, y)\}$ et on pose

$\{f(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\} := \operatorname{Im} f$.

Et en toute généralité, on peut prendre l'image d'une application quelconque $f : E \to F$:

$\operatorname{Im} f := \{y \in F | \exists x \in E, y = f(x)\}$ avec la notation

$\{f(x) | x \in E\} := \operatorname{Im} f$.

6.2 Intersection

6.3 Union

6.4 Complémentaire