Parties

Dédou

Mars 2010

La construction support

Voici la carte de visite de la construction support (pour $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rccl} supp: & (\mathbb{R} \to \mathbb{B}) & \to & Ens \\ & P & \mapsto & supp(P) \\ & P & \mapsto & \{x:\mathbb{R} | P(x)\} \end{array}$$

- $\{x:\mathbb{R}|P(x)\}$ se lit
  "l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ vérifiant (ou tels que) $P(x)$"
- les éléments de cet ensemble sont les réels vérifiant P
- dans $\{x:\mathbb{R}|P(x)\}$, la variable x est liée
- on a donc $\{x:\mathbb{R}|P(x)\} = \{y:\mathbb{R}|P(y)\}$.

Exemple

On a $\{x:\mathbb{R}|x > e \text{ et } x < \pi\} =]e, \pi[$.

Les autres constructions support

Il y a une construction support par ensemble.

Exemple

Dans un ensemble quelconque E, on a toujours au moins la partie vide $\{x : E | Faux\}$
Ici Faux désigne la fonction constante de E dans $\mathbb{B}$.

Exo

Ecrivez la carte de visite de la construction support pour $\mathbb{B}$.

Les éléments d'un support

Comme son nom l'indique

Les éléments de $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$ sont les réels vérifiant P

On a donc la règle d'explicitation :

$\forall a : \mathbb{R}, \forall P : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$,

$$a \in \{x : \mathbb{R} | P(x)\} \Leftrightarrow P(a).$$

Exemple

On a $e + \pi \in \{x : \mathbb{R} | x^2 \leq x\}$ ssi $(e + \pi)^2 \leq e + \pi$.

Exo

Explicitez $1 + \sqrt{2} \in \{x : \mathbb{R} | x^2 - x - 1 = 0\}$.

L'ensemble des parties de $\mathbb{R}$

On dit que $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$ est une partie de $\mathbb{R}$

Notation

L'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proposition

L'application support : $(\mathbb{R} \to \mathbb{B}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est bijective.

Ca veut dire que $(\mathbb{R} \to \mathbb{B})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, c'est quasiment pareil.
Et ça se prouve.

Remarque

Les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont des ensembles.
En vrai, les éléments de tout ensemble sont des ensembles, mais on ne veut pas le savoir, c'est perturbant.

L'appartenance

Voici la carte de visite de l'appartenance dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccl} appart_{\mathbb{R}} : & \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Prop \\ & (x, P) & \longmapsto & appart(x, P) \\ & (x, P) & \longmapsto & x \in P \end{array}$$

Comme on s'en doute

Il y a une appartenance par ensemble.

Exercice

Ecrivez la carte de visite de l'appartenance dans $\mathbb{R}^2$.

L'inclusion

Voici la carte de visite de l'inclusion dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccl} \subset_{\mathbb{R}}: & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & Prop \\ & (A, B) & \mapsto & A \subset \mathbb{R} \\ & (A, B) & \mapsto & \forall x : \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \in B \end{array}$$

On a donc la règle d'explicitation de l'inclusion dans $\mathbb{R}$:

$\forall A\ B : \mathcal{P}(\mathbb{R}),$

$$A \subset B \iff \forall x : \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

(ou si on préfère : $\forall x : A, x \in B$).

Comme on s'en doute

il y a une inclusion $\subset_E$ pour chaque ensemble E.

Exercice

Ecrivez la règle d'explicitation de l'inclusion dans $\mathbb{B}$.

L'égalité des parties

On sait que la règle d'explicitation de l'égalité des fonctions s'écrit :

$\forall f\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

$$f = g \iff \forall x : \mathbb{R}, f(x) = g(x).$$

De même la règle d'explicitation de l'égalité des parties s'écrit :

$\forall A\ B : \mathcal{P}(\mathbb{R}),$

$$A = B \iff \forall x : \mathbb{R}, x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Constructions de parties

La construction support génère toutes les parties mais quand même

on a d'autres constructions de parties :

- le complémentaire
- l'intersection
- la réunion
- l'image
- l'image réciproque.

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$

Voici la carte de visite de la construction Complémentaire (pour $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rccc} Comp: & \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & P & \mapsto & \overline{P} \\ & P & \mapsto & \{x : \mathbb{R} | x \notin P\} \end{array}$$

On a donc la règle d'explicitation du complémentaire dans $\mathbb{R}$:

$\forall A : \mathcal{P}(\mathbb{R}), \forall x : \mathbb{R},$

$$x \in \overline{A} \iff x \notin A.$$

Exemple

On a $\overline{[e, \pi[} =]-\infty, e[\cup[\pi, +\infty[$.

Exo

Calculez $\overline{[1, 2]}$.

L'intersection dans $\mathbb{R}$

Voici la carte de visite de l'intersection (pour $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rccl} \cap : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & (P, Q) & \mapsto & P \cap Q \\ & (P, Q) & \mapsto & \{x : \mathbb{R} | x \in P \text{ et } x \in Q\} \end{array}$$

On a donc la règle d'explicitation de l'intersection dans $\mathbb{R}$:

$\forall A\ B : \mathcal{P}(\mathbb{R}), \forall x : \mathbb{R},$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Exemple

On a $[1, e[\cap]2, \pi[=]2, e[$.

Exo

Calculez $[0, \pi[\cap]2, e[$.

La réunion dans $\mathbb{R}$

Voici la carte de visite de la réunion (pour $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rccl} \cup : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & (P, Q) & \longmapsto & P \cup Q \\ & (P, Q) & \longmapsto & \{x : \mathbb{R} | x \in P \text{ ou } x \in Q\} \end{array}$$

On a donc la règle d'explicitation de la réunion dans $\mathbb{R}$:

$\forall A\ B : \mathcal{P}(\mathbb{R}), \forall x : \mathbb{R},$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Exemple

On a $[1, e[\cup]2, \pi[= [1, \pi[$.

Exo

Calculez $[0, \pi[\cup]2, e[$.

Complémentaire, intersection, réunion, cas général

Complémentaire, intersection, réunion

ça marche pareil avec n'importe quel ensemble à la place de $\mathbb{R}$.

Exo

Ecrivez la carte de visite du compémentaire dans $\mathbb{R}^2$.

L'image, cas particulier

Voici la carte de visite de l'image (pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rccl} Im_f : & \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & f(A) \\ & A & \longmapsto & \{f(x) | x \in A\} \end{array}$$

L'image, cas général

Pour $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles quelconques

$$\begin{array}{rccl} Im_f : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ & A & \mapsto & f(A) \\ & A & \mapsto & \{f(x) | x \in A\} \end{array}$$

On a donc la règle d'explicitation de l'image :

$\forall E\ F : Ens, \forall f : E \to F, \forall A \subset E, \forall y : F,$

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x).$$

Exemples

Exemple

Pour $f := x \mapsto x^2$, on a $f(]-1,2[) = [0,4[$.

Exo

Calculez $\cos(]-1,1[)$.

L'image réciproque

Pour $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles quelconques

$$
\begin{array}{rccl}
f^{-1} : & \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\
& B & \mapsto & f^{-1}(B) \\
& B & \mapsto & \{x : E | f(x) \in B\}
\end{array}
$$

On a donc la règle d'explicitation de l'image réciproque :

$\forall E\ F : Ens, \forall f : E \to F, \forall B \subset F, \forall x : E,$

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Exemples

Exemple

Pour $f := x \mapsto x^2$, on a $f^{-1}(]-1,2[) =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

Exo

Pour $f :=$ cos, calculez $f^{-1}([1,e[)$.