MatDis Résumé7

Tactiques composées

03/09 L1M

1 Ressources

Les tactiques dont on parle ici invoquent des ressources. Les ressources sont les résultats qu'on a le droit d'utiliser, qui sont dans la bibliothèque, ou dans le contexte :

Hypothèses, Théorèmes, Lemmes, Propositions, Corollaires et Définitions.

Une définition, c'est un nom qu'on donne à un objet mathématique identifié par un texte qu'on trouve trop long.

Exemple :

Version littéraire : Etant donnés deux réels x et y, on note $\max(x, y)$ le plus grand des deux.

Version formelle : $\max : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} := (x, y) \mapsto \text{si}\, x \leq y \,\text{alors}\, y \,\text{sinon}\, x$.

Version littéraire : Etant donnés une suite u et un réel ℓ, on dit que ℓ est *la* limite de u si la condition suivante C est satisfaite :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \mathbf{N}, \forall n > N, \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon.$$

La subtilité de cette définition réside dans l'article "la", qui sous-entend, par la tournure choisie, qu'il ne peut y avoir deux limites distinctes. Et en effet, on s'empresse en général de vérifier que, lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Version formelle :

$$\lim : \text{fun}(\{(u, \ell) : (\mathbf{N} \to \mathbf{R}) \times \mathbf{R} | : \forall \epsilon > 0, \exists N : \mathbf{N}, \forall n > N, \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon\}).$$

En français, ça se dit lim est la fonction dont le graphe est l'ensemble des couples (u, ℓ) vérifiant la condition C écrite plus haut. Et quand on dit ça, il faut immédiatement vérifier la condition de graphitude partielle, c'est-à-dire l'unicité de la limite.

C'est comme quand on dit : "soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. On définit la variation moyenne de f par $\text{Var} f := \frac{f(b)-f(b)}{b-a}$." A cet instant, comme on a fait une division, quelqu'un doit vérifier qu'on n'a pas divisé par zéro.

Cette obligation de preuve n'a rien à voir avec les définitions. Elle correspond au fait que les applications partielles sont d'utilisation plus délicate que les applications (totales) : chaque fois qu'on utilise une application partielle (ou une fonction) de E vers F, il faut vérifier que cette utilisation est légitîme.

2 Appliquer au but

Prenons un exemple où le but courant est $e^{3a+1} \leq e^{2b-1}$.

On veut invoquer le théorème qui dit que la fonction exponentielle est croissante : $\forall x : \mathbf{R}, \forall y : \mathbf{R}, x \leq y \implies e^x \leq e^y$.

Alors on l'applique "avec" $x := 3a + 1$ et $y := 2b - 1$, et le nouveau but est $3a + 1 \leq 2b - 1$.

Cherchons à abstraire cette affaire : on a une ressource R de la forme $\forall x : E, \forall y : F, A(x, y) \implies B(x, y)$, et un but courant B.

On peut appliquer R à ce but avec $x := t$ et $y := u$ si $B(t, u) = B$. Dans ce cas, le nouveau but est $A(t, u)$, et le contexte est inchangé.

C'était le cas avec deux $\forall$ et une hypothèse $(A(x, y))$. En général, on peut avoir n'importe quel nombre de $\forall$, y compris 0, et n'importe quel nombre d'hypothèses :

$$\forall x_1 : E_1, \cdots, \forall x_n : E_n, A_1(x_1, dots, x_n) \,\text{et} \cdots \text{et}\, A_r(x_1, dots, x_n) \implies B(x_1, \ldots, x_n).$$

Pour appliquer cette ressource, il faut donner n arguments $t_A, \ldots, t_n$ tels que $B(t_1, \ldots, t_n)$ soit le but courant. Et ce but est remplacé par les r buts $A_1(t_1, dots, t_n), \cdots, A_r(t_1, dots, t_n)$.

Cette tactique mange du pain, en particulier quand la réciproque du résultat invoqué est fausse.

3 Appliquer dans le contexte

On peut appliquer la ressource R de la forme $\forall x : E, \forall y : F, A(x, y) \Longrightarrow B(x, y)$, dans le contexte avec $x := t$ et $y := u$ si $A(t, u)$ est une hypothèse du contexte. On sait donc que $A(t, u)$ est vrai, et la ressource garantit que $B(t, u)$ est aussi vrai. C'est pourquoi cette tactique ajoute cet énoncé $B(t, u)$, comme hypothèse supplémentaire dans le contexte, sans changer le but courant.

Si dans la ressource R il y a plusieurs hypothèses, il faut démontrer celles qui ne sont pas déjà dans le contexte. Par exemple si on applique au contexte courant C, avec $x := t$ et $y := u$, une ressource R de la forme

$$\forall x : E, \forall y : F, A(x, y) \,\text{et}\, A'(x, y) \,\text{et}\, A''(x, y) \Longrightarrow B(x, y),$$

et si par exemple $A'(t, u)$ est une hypothèse courante, alors la tactique géhère trois buts :
$(C; A(t, u))$, $(C; A''(t, u))$, et $(C, B(t, u); B.(C; A(t, u))$,