Tactiques dérivées

Dédou

Mars 2010

D'autres tactiques ?

On a vu les huit tactiques essentielles,

celles qui fondent le sens de nos énoncés.

Mais l'affaire est un peu plus compliquée que ça

on doit introduire quelques autres tactiques.

La tactique Expliciter

Les définitions c'est cool

mais ça masque le vrai énoncé.
Appliquer la tactique Expliciter, c'est restaurer le vrai énoncé, et permettre éventuellement de lui appliquer une tactique logique (ou autre).

On peut expliciter n'importe où :

au but, ou dans une hypothèse.

On a déjà vu plein d'exemples.

La tactique Poser

Les définitions c'est cool

on peut les appliquer
mais on peut aussi en créer de nouvelles.
Quand on est embêté par une formule compliquée t, on peut introduire une nouvelle variable, disons n, du même type que t, avec l'hypothèse $n = t$, ce qu'on écrit souvent en une seule ligne $n := t$.

On a déjà vu plein d'exemples.

La tactique Implique au but

La tactique Implique au but

- le sens de cette tactique est que pour prouver $A \Rightarrow B$, il faut (ou suffit de) prouver B sachant A
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $A \Rightarrow B$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant $(C \vdash A \Rightarrow B)$ par l'objectif $C, H : A \vdash B$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "Nous devons prouver $A \Rightarrow B$. Pour cela, supposons A et prouvons B."

Décomposition de la tactique Implique au but

La tactique Implique

s'obtient par la recette suivante :

- appliquer la tactique Expliciter au but $A \Rightarrow B$
- appliquer la vraie tactique Ou au nouveau but.

Exercice

Quel est ce nouveau but dont il s'agit ?

La tactique Implique au contexte

La tactique Implique au contexte

- le sens de cette tactique est que, si on sait $A \Rightarrow B$, et si on sait prouver A, on peut supposer B
- elle s'applique lorsqu'une hypothèse courante est de la forme $A \Rightarrow B$
- elle a cette hypothèse comme argument mais on s'en fout
- elle remplace l'objectif courant $C, A \Rightarrow B, D \vdash G$ par les deux objectifs $C, A \Rightarrow B, D \vdash A$ et $C, B, D \vdash G$
- elle n'est pas "gratuite" (A peut être faux)
- on peut écrire par exemple : "On va montrer qu'on a A et donc B".

La tactique Hypothèse

La tactique Hypothèse

- le sens de cette tactique est que si le but coïncide avec une hypothèse, c'est bon
- elle s'applique lorsque le but courant coïncide avec une hypothèse
- elle a cette hypothèse en argument (mais on s'en fout)
- elle élimine l'objectif courant
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple à la fin de la phrase en cours " ... ce qui est bien vrai par hypothèse."

La tactique Ménage

La tactique Ménage

- le sens de cette tactique est que, si on veut, on peut oublier des hypothèses qu'on ne va pas utiliser
- elle s'applique dès qu'il y a une hypothèse (libre, voir plus bas)
- elle a cette hypothèse en argument (mais on s'en fout)
- elle remplace l'objectif $C, H, D \vdash G$ par $C, D \vdash G$
- elle est tout sauf "gratuite"
- on pourrait écrire par exemple (mais on ne le fait pratiquement jamais) : " Pour démontrer ça, on n'a pas besoin de l'hypothèse H."
- cette tactique ne fait pas progresser la preuve, elle clarifie juste un peu la situation.

Hypothèses libres

Exemple

Une hypothèse est libre si on peut la retirer du contexte sans invalider celui-ci. Dans le contexte suivant, la première hypothèse n'est pas libre :
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f \text{ dérivable}, f'(e) = \pi.$

La tactique Observer

La tactique Observer

- le sens de cette tactique est que pour prouver A, on peut commencer par prouver un fait H, après quoi il suffit de prouver A avec l'hypothèse supplémentaire H.
- elle s'applique dans toutes les situations
- elle a un argument, qui est le fait H en question
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par les deux objectifs $C \vdash H$ et $C, H \vdash G$.
- elle n'est pas du tout gratuite : si on a choisi un énoncé H qui est faux, on ne va pas s'en sortir.
- on peut écrire par exemple : "Commençons par prouver H. ... Revenons maintenant à la preuve de G."

Histoire de la tactique Observer

Au départ,

avant JC, la tactique Observer s'appelait règle du modus ponens.
C'était la règle fondamentale.
C'est seulement au vingtième siècle qu'ils ont compris que cette règle n'était qu'une conséquence des autres.
Ce n'est pas complétement évident, ça se démontre.

La tactique Contraposer

La tactique Contraposer

- le sens de cette tactique est que pour prouver B sachant A il suffit de prouver $\overline{A}$ sachant $\overline{B}$
- elle s'applique si le contexte contient une hypothèse libre (voir plus haut)
- elle a un argument, qui est l'hypothèse en question
- elle remplace l'objectif courant $C', A, C'' \vdash B$ par l'objectif $C', \overline{B}, C'' \vdash \overline{A}$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "Raisonnons par contraposition : supposons que B est faux, et montrons que A est faux."

Justification approximative de la tactique Contraposer

Si deux objectifs sont contraposés l'un de l'autre

et si on peut prouver l'un avec les huit tactiques logiques, on peut aussi prouver l'autre. Ca vient de la symétrie entre tactiques au but et tactiques au contextes.

Exemple

Considérons l'objectif $(C, A \vdash B \text{ and } B')$. La tactique Et au but génère deux objectifs O_1 et O_2. Symétriquement, on peut appliquer la tactique Ou au contexte à l'objectif contraposé $(C, \overline{B} \text{ or } \overline{B'} \vdash \overline{A})$. Les deux objectifs générés sont contraposés de 0_1 et 0_2.

Exercice

Ecrivez un de ces deux derniers objectifs.

Digression sur la tactique Contraposer

Plutôt que de jouer à contraposer

il paraît plus simple (mais un peu moins intuitif pour un étudiant de première année) de contraposer une fois pour toutes avec Vrai : au lieu de considérer $C \vdash G$, passer à $C, Vrai \vdash G$ puis par contraposition, à $C, \overline{G} \vdash Faux$ parce que dans cette situation, tout se passe au contexte, et on n'a plus de tactique au but (deux fois moins de tactiques).

La tactique Absurde

La tactique Absurde

- le sens de cette tactique est que pour prouver B, on a le droit de supposer B faux.
- elle s'applique toujours
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash B$ par l'objectif $C, \overline{B} \vdash B$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "Raisonnons par l'absurde et supposons que B est faux."

Les profs n'aiment pas la tactique Absurde

parce que les étudiants en abusent.

Justification de la tactique Absurde

La tactique Absurde se décompose comme suit

- on part de l'objectif courant $C \vdash B$
- on observe Vrai (qu'on sait prouver), et l'objectif devient $C, V \vdash B$
- on contrapose V et l'objectif devient $C, \overline{B} \vdash F$
- on observe $\overline{B}$, qu'on sait prouver par la tactique Hypothèse, et l'objectif courant devient $C, \overline{B}, \overline{B} \vdash F$
- et on contrapose à nouveau, le but courant devient

La tactique Distinguer

La tactique Distinguer

- le sens de cette tactique est que pour prouver A, on peut commencer par prouver A moyennant une hypothèse supplémentaire H, puis prouver de nouveau A, mais moyennant cette fois l'hypothèse contraire $\overline{H}$
- elle s'applique dans toutes les situations
- elle a un argument, qui est l'énoncé H en question
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par les deux objectifs $C, H \vdash G$ et $C, \overline{H} \vdash G$.
- elle est gratuite en principe, mais si H est mal choisi, elle ne sert à rien
- on peut écrire par exemple : "Commençons par supposer H. ... Supposons maintenant au contraire que H est faux. ..."

Justification de la tactique Distinguer

La tactique Distinguer suivant H

s'obtient par la recette suivante :

- Observer H or $\overline{H}$
- Le premier but H or $\overline{H}$ est prouvé une fois pour toutes
- Pour le second objectif, appliquer la tactique Ou à la nouvelle hypothèse H or $\overline{H}$.