Tactiques chaudes

Dédou

Mars 2010

Encore d'autres tactiques ?

On a vu les tactiques faciles

il reste les tactiques les plus chaudes, en particulier du genre appliquer. Mais d'abord on va parler de ressources.

Les ressources

Quand on fait des maths on n'est pas tout seul

- on ne refait pas le monde mathématique tous les jours
- "on est sur les épaules d'un géant"
- on utilise une bibliothèque (livre, web ...) de résultats divers
- il s'agit d'énoncés démontrés par d'autres, qu'on appelle ressources
- (c'est pour ne pas choisir entre les divers termes :
- théorème, proposition, lemme, corollaire etc).

Exercice

Citez votre ressource favorite.

Contexte, définitions, ressources

Définitions et ressources

La question de savoir si les définitions sont aussi des ressources n'est pas importante, et
on peut sans danger y répondre oui.
Le fait est que la tactique Expliciter nous permet déjà de traîter "définitivement" les définitions, il n' y a donc plus lieu d'en parler.

Contexte et ressources

On peut, une fois pour toutes, "Observer" toutes nos ressources, ce qui les met dans le contexte. Et pour ne pas se compliquer la vie on considérera que les hypothèses (courantes) sont aussi des ressources.

Appliquer une ressource

Considérons par exemple la ressource :

$$TVI := \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall I \subset \mathbb{R},$$
$$f \ \mathit{is\_continue} \text{ and } I \ \mathit{is\_intervalle} \Rightarrow f(I) \ \mathit{is\_intervalle}.$$

On peut “appliquer” ce résultat comme suit

- pour chacun des foralls du début, on choisit une valeur par exemple $f := \cos$ et $I := [2, e[$
- on dit qu'on applique TVI à ces deux arguments
- on obtient l'énoncé $TVI(\cos, [2, e[)$
- on dit que ce nouvel énoncé est une instance de l'énoncé général TVI
- $TVI(\cos, [2, e[)$ est l'implication suivante
  $\cos \ \mathit{is\_continue}$ and $[2, e[\ \mathit{is\_intervalle}$
  $$\Rightarrow \cos([2, e[) \ \mathit{is\_intervalle}.$$

Déduire et réduire

Quand on dispose d'une ressource de la forme $A \Rightarrow B$,

- on peut appliquer la tactique Implique au contexte, pour "déduire" la nouvelle hypothèse B de A
- mais si par chance, notre but courant est justement B, en enchaînant avec la tactique Hypothèse, on remplace notre objectif initial $C, A \Rightarrow B, D \vdash B$ par le seul objectif $C, A \Rightarrow B, D \vdash A$
- dans ce second cas, on dit qu'on utilise l'implication pour "réduire" B à A.

Le second cas n'est qu'une petite variante du premier, mais il se présente très souvent, c'est pourquoi on met les deux cas sur le même plan. On va commencer par le second.

Appliquer au but

Appliquer une ressource R au but, c'est

- choisir les arguments $\vec{a}$ de R de façon que $R(\vec{a})$ soit de la forme $A \Rightarrow G$, avec G le but courant (tactique Forall au contexte)
- puis réduire G à A (tactique Implique au contexte).

Appliquer au contexte

Appliquer une ressource R au contexte, c'est

- choisir les arguments $\vec{a}$ de R de façon que $R(\vec{a})$ soit de la forme $H \Rightarrow B$, avec H une hypothèse courante (tactique Forall au contexte)
- puis déduire B de H (tactique Implique au contexte).

Réécrire au but

La tactique Réécrire au but

- le sens de cette tactique est que si on sait que A et B sont égaux, pour prouver G, il suffit de prouver le but G' obtenu en remplaçant, dans G, A par B, ici où là
- elle s'applique dès qu'on dispose d'une égalité à appliquer
- elle n'a comme argument les places dans G où on veut remplacer A et la ressource R qui fournit l'égalité $A = B$
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par l'objectif $C \vdash G'$ comme indiqué plus haut
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "En appliquant R, on se ramène à prouver G'."

Réécrire au contexte

La tactique Réécrire au contexte

c'est pareil sauf que c'est dans une hypothèse qu'on remplace A par B.

Simplifier

La tactique Simplifier

applique Réécrire de façon intelligente.

Appliquer et appliquer

On aura remarqué qu'on emploie le mot "appliquer" pour

- utiliser une ressource pour réduire le but
- utiliser une ressource pour déduire du contexte
- utiliser une ressource pour réécrire, au but ou au contexte.
- et même parfois, on parle d'appliquer une définition..

Induction

La tactique Induction

- on connaît bien cette tactique
- elle s'applique quand le but est de la forme $\forall n : \mathbb{N}, P(n)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant
  $$C \vdash \forall n : \mathbb{N}, P(n) \text{ ou } C, n : \mathbb{N} \vdash P(n)$$
  par les deux objectifs
  $C \vdash P(0)$ et $C, n : \mathbb{N}, P(n) \vdash P(n+1)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple :
  "Raisonnons par récurrence sur n ..."

Exemples

776 Le minimum entre deux nombres est inférieur à chacun d'eux.
687 Les minorants du minimum de deux nombres sont les minorants communs à ces deux nombres.

Exercice

Démontrer

La somme de deux nombres est toujours égale à celle de leur min et de leur max.
a) Formaliser.
b) Ecrivez la liste des tactiques en négligeant les buts faciles.
c)Rédigez votre preuve.

Exemples

147 2

Soit u une suite vérifiant $u_0 < u_1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est strictement croissante, il en est de même de u.

Exercice

Démontrer

Soit u une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante, alors u est monotone.

a) Formalisez.

b) Ecrivez la liste des tactiques en négligeant les buts faciles.

c)Rédigez votre preuve.

Exemples

315
$(1, 2, 3)$ est combinaison linéaire de $(0, 1, 2)$ et $(1, 0, -1)$.
205
L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Exercice

Démontrer

Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
a) Formalisez.
b) Ecrivez la liste des tactiques en négligeant les buts faciles.
c)Rédigez votre preuve.

Exemple

Open