Tactiques logiques

Dédou

Mars 2010

Rappel sur les énoncés

Nos énoncés ont l'une des formes suivantes

- $V \quad F$
- A and $B \quad A$ or B
- $\forall x : E, A \quad \exists y : F, B$
- et puis il y a les prédicats de base ($= \quad \leq$ etc)
- et enfin il y a des définitions.

Exercice 1

Donnez votre énoncé favori.

Une forme d'énoncé = une tactique

On va donner (en gros)

une tactique par forme d'énoncé.

La tactique Vrai

Pour s'échauffer, on commence avec des tactiques un peu bidon.

La tactique Vrai

- le sens de la tactique Vrai, c'est que Vrai est vrai !
- elle s'applique lorsque le but (de l'objectif courant) est Vrai
- elle a pour argument le nom de l'hypothèse en question (il peut y en avoir pplusieurs)
- elle supprime l'objectif courant (si c'était le dernier, la pile devient vide)
- elle est "gratuite"
- on ne mentionne pas cette tactique dans la rédaction.

La tactique Faux

La tactique Faux

- le sens de la tactique Faux, c'est que sous une hypothèse absurde, tout énoncé est vrai ($F \Rightarrow V$)
- elle s'applique lorsqu'une hypothèse (du contexte courant) est Faux
- elle n' a pas d'argument
- elle supprime l'objectif courant (si c'était le dernier, la pile devient vide)
- elle est "gratuite"
- on ne mentionne pas cette tactique dans la rédaction.

La tactique Et au but

La tactique Et au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver A and B, il suffit de prouver A puis B
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme A and B
- elle n' a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant ($C \vdash A$ and B) par les deux objectifs : ($C \vdash A$) et ($C \vdash B$)
- elle est "gratuite"
- on peut écrire (quelque chose de plus court que) : Nous devons prouver A and B. Pour cela, commençons par prouver A. ... Et maintenant prouvons B. ...

Exemple pour la tactique Et au but

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est croissante, alors $f[a,b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon objectif courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{croissante},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R},\ a \le b,\ x \in f[a,b] \\ \vdash x \in [f(a), f(b)].$$

J'explicite $x \in [f(a), f(b)]$ en $f(a) \le x$ and $x \le f(b)$ puis j'applique la tactique Et au but. Mon objectif courant devient

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{croissante},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R},\ a \le b,\ x \in f[a,b] \\ \vdash f(a) \le x.$$

Exercice

Cette dernière tactique a aussi mis un nouvel objectif en attente. Lequel ?

La tactique Ou au contexte

La tactique Ou au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A or B, il suffit de traîter successivement le cas où A est vrai, puis celui où B est vrai
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A or B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs)
- elle remplace l'objectif courant $(C', A \text{ or } B, C'' \vdash G)$ par les deux objectifs $(C', A, C'' \vdash G)$ et $(C', B, C'' \vdash G)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire (quelque chose de plus court que) : "On sait qu'on a A or B. Commençons par supposer A. ... Et maintenant supposons B. ..."

Exemple pour la tactique Ou au contexte

Exemple

Je cherche à montrer que la composée de deux fonctions monotones est monotone.

Mon objectif courant est

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ monotone}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \text{ monotone} \vdash f \circ g \text{ monotone}$

J'explicite l'hypothèse "f monotone" en

"f est croissante ou f est décroissante"

et j'applique cette tactique Ou au contexte.

Mon objectif courant devient :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ croissante}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \text{ monotone} \vdash f \circ g \text{ monotone}$

Exo

Cette dernière tactique a mis un nouvel objectif en attente. Lequel ?

La tactique Et au contexte

La tactique Et au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A and B, il suffit de prouver G sachant A et B
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A and B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs)
- elle remplace l'objectif courant $C'; A$ and $B; C'' \vdash G$ par l'objectif $C'; A; B; C'' \vdash G$
- elle est "gratuite"
- cette tactique ne laisse pas de trace dans la rédaction.

Exemple pour la tactique Et au contexte

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est continue, alors son image est un intervalle. Mon objectif courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\mathrm{continue},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, y \in [f(a), f(b)] \vdash \exists x : \mathbb{R}, f(x) = y.$$

J'explicite $y \in [f(a), f(b)]$ en $f(a) \leq x$ and $x \leq f(b)$ puis j'applique la tactique Et au contexte. Mon objectif courant devient

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\mathrm{continue},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, f(a) \leq y,\ y \leq f(b) \vdash \exists x : \mathbb{R}, f(x) = y.$$

Exercice

Rappelez la définition de $[a, b]$ (celle utilisée ci-dessus) ;
ou, si vous préférez :
dans l'exemple précédent, écrivez le contexte intermédiaire entre l'explicitation et la tactique.

La tactique Ou au but non gratuite

La tactique Ou au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver A or B, il suffit de prouver A ou de prouver B
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme A or B
- elle a un argument qui est soit gauche soit droite.
- elle remplace l'objectif courant $(C \vdash A \text{ or } B)$ par $(C \vdash A)$ si son argument est gauche et par $(C \vdash B)$ si son argument est droite
- elle n'est pas gratuite : si on a choisi le mauvais côté, ça peut se payer cash !
- par exemple dans le cas de l'argument droit, on peut écrire : Nous devons prouver A or B. Pour cela, prouvons B. ...

Exemple pour cette tactique Ou au but

Exemple

Si on reprend l'exemple précédent, on a deux fonctions sur $\mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec f maintenant décroissante et g croissante et l'énoncé E à prouver est $f \circ g$ est monotone.
Si on explicite monotone, ce but devient

$$f \circ g \text{ est croissante or } f \circ g \text{ est décroissante.}$$

On applique notre tactique Ou au but (avec l'argument droite) et notre but devient : $f \circ g$ est décroissante.

Exercice

Vous essayez de démontrer que pour que $f \circ f$ soit monotone, il suffit que f le soit. Votre objectif courant est

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{décroissante} \vdash f \circ f \text{monotone.}$$

Vous explicitez le but puis appliquez intelligemment cette tactique Ou au but. Quel est votre nouvel objectif ?

La vraie tactique Ou au but

La vraie tactique Ou au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver A or B, il suffit de prouver de prouver B en supposant A faux, ou alors de prouver A en supposant B faux
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme A or B
- elle a un argument qui est soit gauche soit droite.
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash A$ or B
  si son argument est gauche par $C, \overline{B} \vdash A$
  et si son argument est droite par $C, \overline{A} \vdash B$
- celle-ci est gratuite
- par exemple dans le cas de l'argument droit, on peut écrire : Supposons que A est faux, et prouvons B ...

Cette tactique est plus forte que l'autre, "c'est la vraie".

Exemple pour la vraie tactique Ou au but

Exemple

J'essaie encore de démontrer que pour que $f \circ f$ soit monotone, il suffit que f le soit. Mon objectif courant est

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{croissante} \vdash\ f \circ f \text{monotone}.$$

J'explicite le but puis j'applique à gauche la vraie tactique Ou au but. Mon objectif courant devient :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{croissante};\ f \circ f \text{non décroissante} \vdash\ f \circ f \text{croissante}.$$

Exercice

Bob essaie aussi de démontrer que pour que $f \circ f$ soit monotone, il suffit que f le soit. Comme c'est un boulet : il applique la bonne tactique, mais à droite. Quel est son nouvel objectif ?

La tactique Forall au but

La tactique Forall au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver $\forall x : E, P(x)$, il suffit de prouver $P(x)$ en supposant seulement que x est de type E
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $\forall x : E, P(x)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash \forall x : E, P(x)$ par $C; x : E \vdash P(x)$
- elle est gratuite
- on peut écrire par exemple :
  "Soit x un élément quelconque de E et prouvons $P(x)$"

Exemple pour la tactique Forall au but

Exemple

J'essaie de démontrer que si f est majorée par a et g est majorée par b alors $f + g$ est majorée par $a + b$. Mon objectif courant est

$$f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ a,\ b : \mathbb{R};\ f \text{ majorée par } a;\ g \text{ majorée par } b \\ \vdash f + g \text{ majorée par } a + b.$$

J'explicite le but puis j'applique la tactique Forall au but.
Mon objectif courant devient :

$$f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ a,\ b : \mathbb{R};\ f \text{ majorée par } a;\ g \text{ majorée par } b;\ x : \mathbb{R} \\ \vdash (f + g)(x) \leq a + b.$$

Exercice

Dans l'exemple ci-dessus, quel est le but intermédiaire, entre l'explicitation et la tactique Forall ?

La tactique Exists au contexte

La tactique Exists au contexte

- le sens de cette tactique est que savoir $\exists x : E, P(x)$, c'est comme avoir un x vérifiant $P(x)$
- elle s'applique lorsque le contexte courant comporte une hypothèse de la forme $\exists x : E, P(x)$
- elle a un argument, qui est cette hypothèse (pour le cas où il y en a plusieurs)
- elle remplace l'objectif courant

  $$C'; \exists x : E, P(x); C'' \vdash G$$

  par

  $$C'; x : E; P(x); C'' \vdash G$$

- elle est gratuite
- c'est encore une tactique qui ne laisse pas de trace écrite

Exemple pour la tactique Exists au contexte I

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est monotone, alors $f[a,b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon objectif courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\; f \text{croissante};\; a : \mathbb{R};\; b : \mathbb{R};\; a \leq b;\; y \in f[a,b] \\ \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

J'explicite $y \in f[a,b]$ en $\exists x : [a,b], y = f(x)$ puis j'applique la tactique Exists au contexte.
Mon objectif courant devient

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\; f \text{croissante};\; a : \mathbb{R};\; b : \mathbb{R};\; a \leq b;\; x : [a,b];\; y = f(x) \\ \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

Exercice

Quelle est la définition de $[a,b]$ mise en oeuvre dans cet exemple ? Expliquez à quoi vous voyez ça.

Exemple pour la tactique Exists au contexte II

Exemple

Je suis en train de démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée. Mon objectif courant est

$$f\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ majorée};\ g \text{ majorée} \vdash\ f+g \text{ majorée}.$$

J'explicite la première hypothèse en $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$ puis j'applique la tactique Exists au contexte.

Mon objectif courant devient :

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ M : \mathbb{R};\ \forall x : \mathbb{R},\ f(x) \leq M;\ g \text{ majorée} \vdash f+g \text{ majorée}.$$

Exercice

Ecrivez l'objectif courant après une seconde application de la tactique Exists au contexte.

La tactique Forall au contexte

La tactique Forall au contexte

- le sens de cette tactique est que, si on sait $\forall x : E, P(x)$, on sait a fortiori $P(a)$ pour n'importe quel élément a de E
- elle s'applique lorsqu'une hypothèse du contexte courant est de la forme $\forall x : E, P(x)$
- elle a deux arguments, un qui est l'hypothèse en question (il peut y en avoir plusieurs) et l'autre qui est l'argument choisi a
- elle remplace l'objectif courant
$$C'; \forall x : E, P(x); C'' \vdash G$$
par
$$C'; \forall x : E, P(x); C''; \color{red}{P(a)} \vdash G.$$
- elle est gratuite
- on peut écrire par exemple :
"Si on applique notre hypothèse à a, on obtient $P(a)$."

La tactique Exists au but

La tactique Exists au but

- le sens de cette tactique est que prouver $\exists x : E, P(x)$, c'est donner un "témoin" t vérifiant $P(t)$
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $\exists x : E, P(x)$
- elle a un argument (essentiel !) : le témoin t
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash \exists x : E, P(x)$ par $C \vdash P(t)$
- elle est tout sauf gratuite
- on peut écrire par exemple : "Prenons t pour témoin"
- ou encore "Montrons que t convient".

Exemple pour la tactique Existe au but

Exemple

Je suis en train de démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée. Mon objectif courant est

$$f\ \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ M\ \ N : \mathbb{R};\ \ f \text{ majorée par } M;\ \ g \text{ majorée par } N \\ \vdash\ \ f+g \text{ majorée.}$$

J'explicite le but et je prends $M+N$ comme témoin

Mon objectif courant devient :

$$f\ \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ M\ \ N : \mathbb{R};\ \ f \text{ majorée par } M;\ \ g \text{ majorée par } N \\ \vdash\ \ (f+g)(x) \leq M+N.$$

Exercice

Dans l'exemple ci-dessus, quelle est la définition de “majorée” qui est mise en oeuvre ?

A suivre