

# Énoncés

Dédou

Février 2011

Mon premier énoncé mathématique, c'est

$$2 + 2 = 4.$$

On y voit deux formules différentes pour le même nombre.

Exercice 1

Combien de formules peut-on écrire pour 4 avec deux chiffres et un + ?

## L'ensemble des formules pour les entiers

Il y a bien un ensemble des formules de type entier  
mais on ne s'y est jamais trop intéressé.

# Les réels et les angles

On a aussi un ensemble des formules pour les angles  
tout réel est une formule pour un angle.

Pour bien faire

il faudrait noter différemment le réel et l'angle qu'il représente, mais personne ne le fait, et les boulets ne captent pas bien la différence.

Exo 2

Soit  $x$  un réel. Quels sont les réels qui représentent le même angle que  $x$  ?

# Les fractions et les rationnels

On a aussi un ensemble des formules pour les rationnels

toute fraction est une formule pour un rationnel.

Pour bien faire

il faudrait noter différemment la fraction et le rationnel qu'elle représente, mais personne ne le fait, et les boulets ne captent pas bien la différence.

La différence entre fraction et rationnel apparaît quand

- on veut distinguer les fractions réductibles des fractions irréductibles :
- il n'y a pas de définition pertinente de rationnel "réductible".

# Énoncés et booléens

Les énoncés sont  
les formules pour les booléens.

L'ensemble de tous les énoncés  
est noté *Prop* (au lieu d' "énoncé", on dit parfois "proposition").

# Exemples

$V$  and  $F$  et  $V \Rightarrow F$

sont deux énoncés différents, qui sont vrais tous les deux.

Une différence :

$V \Rightarrow F$  a une réciproque, qui est  $F \Rightarrow V$ , tandis que  $V$  and  $F$  n'a pas de réciproque.

Exo 3

Donnez deux énoncés différents et qui sont tous les deux vrais.

# Comment définir les énoncés ?

## On va définir les énoncés en donnant

- une liste d'énoncés de base
- une liste de constructions pour formuler de nouveaux énoncés à partir d'anciens.

## Ca nous rappelle les fonctions qu'on rencontre :

- y'a les fonctions de base, sinus, cosinus, logarithme, exponentielle, et les puissances ;
- y'a les sommes, produits, quotients ;
- y'a les composées.



## Voici nos énoncés de base

- $V$  et  $F$  sont des énoncés
- si  $x$  et  $y$  sont deux éléments d'un même ensemble (par exemple  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ),  $x = y$  et  $x \neq y$  sont des énoncés
- (pour être à l'aise) si  $x$  et  $y$  sont deux réels,  $x \leq y$  et  $x < y$  sont des énoncés.

# Les connecteurs

Si  $A$  et  $B$  sont deux énoncés, il en est de même pour :

- $A$  and  $B$
- $A$  or  $B$ .

Exemple

$1 = 3$  or  $V = F$  est un énoncé.

L'implication

sera **définie** plus loin (après la négation) par

$$\Rightarrow := (A, B) \mapsto \bar{A} \text{ or } B.$$

Exo 4

Donnez votre énoncé favori.

## Le type des connecteurs

Nos connecteurs ont donc les types suivants :

- $\text{and} : Prop \times Prop \rightarrow Prop$
- $\text{or} : Prop \times Prop \rightarrow Prop$
- $\Rightarrow : Prop \times Prop \rightarrow Prop.$

## Intermède : Énoncés et variables

Pour les énoncés comme pour le reste

il y a un contexte, et dans les énoncés, il peut y avoir des variables.

Exemple

Si  $x$  est une variable réelle et  $b$  une variable booléenne du contexte,

$$x \leq \pi \text{ and } (b = F)$$

est un énoncé.

Exo 5

Donnez votre énoncé favori comportant deux variables réelles et deux connecteurs..

# Les quantificateurs

Le truc sérieux pour faire des énoncés, c'est les quantificateurs.

En première approximation il y a deux quantificateurs ;  $\forall$  ("pour tout") et  $\exists$  ("il existe").

# Les quantificateurs universels

Le quantificateur universel, c'est

quelque soit, alias pour tout, alias  $\forall$ . On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur universel est un énoncé universel.

En seconde approximation

il y a un quantificateur universel par ensemble.

On note très provisoirement  $\forall_E$  le quantificateur universel pour l'ensemble  $E$ .

On a donc par exemple un quantificateur  $\forall_{\mathbb{R}}$  et un autre  $\forall_{\mathbb{B}}$ .

# Le quantificateur universel réel

## Le quantificateur universel réel

a pour carte de visite :

$$\begin{aligned}\forall_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R} \rightarrow Prop) &\rightarrow Prop \\ P &\mapsto \forall_{\mathbb{R}} P \\ P &\mapsto \forall x : \mathbb{R}, P(x).\end{aligned}$$

## Exemple d'énoncé "universel"

$$\forall x : \mathbb{R}, x \leq 0 \text{ or } 0 \leq x.$$

## Exo 6

Donnez votre exemple favori d'énoncé universel faux.

# Quantification et liaison

Dans  $\forall x : \mathbb{R}, P(x)$

la variable  $x$  est liée.

Exemple

$$\forall x : \mathbb{R}, x \leq 0 \text{ or } 0 \leq x$$

et

$$\forall y : \mathbb{R}, y \leq 0 \text{ or } 0 \leq y$$

sont deux énoncés égaux.



## Intermède : Égalité d'énoncés

Il est important de distinguer les variables liées des variables libres  
mais il n'est jamais important de savoir si deux énoncés sont égaux.  
Ce qui peut être important,  
c'est de savoir si deux énoncés sont **équivalents**.

# Le quantificateur universel booléen

Exemple d'énoncé "universel booléen" vrai

$$\forall b : \mathbb{B}, V \text{ and } b.$$

Exo 7

Donnez la carte de visite du quantificateur universel booléen.

# Le sens de la quantification universelle

## Exemple

Quand on dit “pour tout entier  $n$ ,  $n^3 + 3n^2 + 2n$  est divisible par 6”, on veut dire que tous les énoncés suivants sont vrais :

- (pour  $n = 0$  :) 0 est divisible par 6
- (pour  $n = 1$  :) 6 est divisible par 6
- (pour  $n = 2$  :) 18 est divisible par 6
- etc

## Un énoncé universel

peut donc condenser une infinité d'énoncés plus simples.

# Les quantificateurs existentiels

Le quantificateur existentiel, c'est

il existe, alias  $\exists$ . On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur existentiel est un énoncé existentiel. Comme pour les universels, il y a un quantificateur existentiel par ensemble. On note très provisoirement  $\exists_E$  le quantificateur existentiel pour l'ensemble  $E$ .

# Le quantificateur existentiel réel

## Le quantificateur existentiel réel

a pour carte de visite :

$$\begin{aligned}\forall_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R} \rightarrow Prop) &\rightarrow Prop \\ P &\mapsto \exists_{\mathbb{R}} P \\ P &\mapsto \exists x : \mathbb{R}, P(x).\end{aligned}$$

## Exemple d'énoncé "existentiel"

$$\exists x : \mathbb{R}, x^4 - 1000x^3 + \pi x^2 - x = 3.$$

# Quantification existentielle et liaison

Dans  $\exists x : E, P(x)$

la variable  $x$  est liée.

Les énoncés

$$\exists x : E, P(x)$$

et

$$\exists y : E, P(y)$$

sont égaux

(mais on s'en fout).

# Le sens de la quantification existentielle

## Exemple

Quand on dit

“il existe un entier  $n$  vérifiant  $(n + 2)^{1000} \leq 2^n$ ”,

on veut dire qu'au moins un des énoncés suivants est vrai :

- (pour  $n = 0$  :)  $2^{1000} \leq 1$
- (pour  $n = 1$  :)  $3^{1000} \leq 2$
- (pour  $n = 2$  :)  $4^{1000} \leq 4$
- (pour  $n = 3$  :)  $5^{1000} \leq 8$
- etc

Dans un tel exemple, on saurait trouver un entier  $n$  explicite ayant cette propriété, par exemple  $n := 10^6$ , mais on se fiche de la valeur exacte, et on préfère la désigner par un nom court.

## Tous les énoncés s'obtiennent

- à partir des énoncés de base ( $V$ ,  $F$ , égalités, inégalités)
- avec des connecteurs binaires
- et/ou des quantificateurs.

## Ce n'est pas tout-à-fait vrai

à cause des définitions, dont on va parler bientôt.

Ce qui est vrai, c'est qu'un énoncé **explicite** est de l'une des formes indiquées plus haut.

Un énoncé explicite est un énoncé qui ne sollicite aucune définition.

Tout énoncé est équivalent (égal ?) à un énoncé explicite, qui s'obtient en remplaçant tous les noms par leur valeur.



# Empilement de quantificateurs

On peut enchaîner les quantificateurs, exemples :

- $\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$
- (qu'on peut raccourcir en  $\forall x, y : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$ )
- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$ .

Quand on enchaîne plusieurs quantificateurs

si on permute un  $\forall$  et un  $\exists$ , ça risque de changer le sens.

Exemple

- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$  est faux tandis que
- $\forall x : \mathbb{R}, \exists M : \mathbb{R}, e^x \leq M$  est vrai (prendre  $M := e^x$ ).

En revanche on peut permuter deux  $\forall$  ou deux  $\exists$

$\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$  et  
 $\forall y : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$  sont équivalents.

# Langage naturel et langage formel

On est habitués aux énoncés en langage naturel

Il faut savoir les traduire en langage formel.

Exemple

$n$  est pair  $\Leftrightarrow \exists p : \mathbb{Z}, n = 2p$ .

Exo 8

Donnez une traduction formelle de  $n$  est impair.

## Autres exemples

- pour  $n$  suffisamment grand,  $u_n$  est positif
- $f$  garde un signe fixe sur  $I$
- tout entier est somme de quatre carrés
- $u_n$  tend vers 297 quand  $n$  tend vers l'infini
- $f$  respecte les combinaisons linéaires.

On a une négation pour les énoncés

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{lcl} \textit{non} : & \textit{Prop} & \rightarrow \textit{Prop} \\ & P & \mapsto \overline{P} \end{array}$$

# Le calcul de la négation

la négation d'un énoncé s'obtient en appliquant les règles suivantes

- $\overline{V} = F, \quad \overline{F} = V, \quad \overline{x \leq y} = y < x, \quad \overline{x < y} = y \leq x.$
- $\overline{A \text{ and } B} = \overline{A} \text{ or } \overline{B} \quad \overline{A \text{ or } B} = \overline{A} \text{ and } \overline{B}$
- $\overline{\forall x : E, P(x)} = \exists x : E, \overline{P(x)}, \quad \overline{\exists x : E, P(x)} = \forall x : E, \overline{P(x)}.$

## Exemple

La négation de  
est

$$\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$$
$$\forall M : \mathbb{R}, \exists x : \mathbb{R}, M < f(x).$$

## Exo 9

Calculer la négation de  $\forall x, y : \mathbb{R}, y < x \text{ or } f(x) \leq f(y).$

# L'implication et sa négation

## Définition

Voici la carte de visite de l'implication

$$\begin{aligned} \Rightarrow: \text{Prop} \times \text{Prop} &\rightarrow \text{Prop} \\ (P, Q) &\mapsto \overline{P} \text{ or } Q \end{aligned}$$

## Attention

La négation de l'implication est un peu bizarre :

$$\overline{P \Rightarrow Q} = P \text{ and } \overline{Q}.$$

## Exo 10

Calculer la négation de  $\forall x, y : \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ .

# L'équivalence et sa négation

## Définition

Voici la carte de visite de l'équivalence

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow: \text{Prop} \times \text{Prop} &\rightarrow \text{Prop} \\ (P, Q) &\mapsto (P \Rightarrow Q) \text{ and } (Q \Rightarrow P) \end{aligned}$$

## Attention

La négation de l'équivalence est très bizarre :

$$\overline{P \Leftrightarrow Q} = (P \text{ and } \overline{Q}) \text{ or } (Q \text{ and } \overline{P}).$$

## Exo 10

Calculer la négation de  $\forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ .

Donnez votre formulation littéraire de cette négation.