

Mes premières tactiques gratuites

Dédou

Février 2011

La tactique ForallB

- le sens de cette tactique est que, pour prouver $\forall x : E, P(x)$, il suffit de prouver $P(x)$ en supposant seulement que x est de type E
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $\forall x : E, P(x)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash \forall x : E, P(x)$
par $C; x : E \vdash P(x)$
- elle est gratuite
- on peut écrire par exemple :
"Soit x un élément quelconque de E et prouvons $P(x)$ "

La règle d'inférence ForallB

Avant : $C \vdash \forall x : E, P(x)$

Après : $C; x : E \vdash P(x)$

Exemple pour la tactique ForallB

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. Mon objectif initial est

$$\vdash \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ et } g \text{ majorées} \Rightarrow f + g \text{ majorée.}$$

J'applique la tactique ForallB et mon objectif devient :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \vdash \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ et } g \text{ majorée} \Rightarrow f + g \text{ majorée.}$$

Exo 1

Que devient cet objectif si j'applique une deuxième fois la tactique ForallB ?

La tactique Implique au but

- le sens de cette tactique est que pour prouver $A \Rightarrow B$, il faut (ou suffit de) prouver B sachant A
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $A \Rightarrow B$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant $(C \vdash A \Rightarrow B)$ par l'objectif $C, H : A \vdash B$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : Nous devons prouver $A \Rightarrow B$. Pour cela, supposons A et prouvons B .

La règle d'inférence ImpB

Avant : $C \vdash A \Rightarrow B$

Après : $C; A \vdash B$

ou, si on met des noms aux hypothèses :

Avant : $C \vdash A \Rightarrow B$

Après : $C; H : A \vdash B$

Exemple pour la tactique ImpB

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. J'ai déjà fait deux ForallB et mon objectif courant est

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \vdash f \text{ et } g \text{ majorées} \Rightarrow f + g \text{ majorée.}$$

J'applique la tactique ImpB et mon objectif devient :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ et } g \text{ majorées} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

Exo 2

Si on fait ForallB puis ImpB pour prouver que le cube d'une fonction croissante est croissante, quel objectif courant obtient-on ?

La tactique Et au contexte

La tactique Et au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A and B , il suffit de prouver G sachant A et B
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A and B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs)
- elle remplace l'objectif courant $C'; A$ and $B; C'' \vdash G$ par l'objectif $C'; A; B; C'' \vdash G$
- elle est "gratuite"
- cette tactique ne laisse pas de trace dans la rédaction.

La règle d'inférence EtC

Avant : $C'; A \text{ and } B; C'' \vdash G$

Après : $C'; A; B; C'' \vdash G$

ou, si on met des noms aux hypothèses :

Avant : $C'; A \text{ and } B; C'' \vdash G$

Après : $C'; H : A; K : B; C'' \vdash G$

Exemple pour la tactique Et au contexte

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. J'ai déjà fait deux ForallB et un ImpB et mon objectif courant est

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ et } g \text{ majorées} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

J'explicité "majorées" et mon hypothèse devient f majorée and g majorée. J'applique la tactique EtC à cette hypothèse et mon objectif courant devient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ majorée}; g \text{ majorée} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

Exo 3

Formaliser l'énoncé "si une fonction est à la fois croissante et décroissante, elle est constante" et appliquez-lui trois tactiques successives.

Exemple pour la tactique Et au contexte

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est continue, alors son image est un intervalle. Mon objectif courant est le suivant

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continue, $a : \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R}$, $y \in [f(a), f(b)]$
 $\vdash \exists x : \mathbb{R}, f(x) = y.$

J'explique $y \in [f(a), f(b)]$ en $f(a) \leq x$ and $x \leq f(b)$ puis j'applique la tactique Et au contexte. Mon objectif courant devient

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continue, $a : \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R}$, $f(a) \leq y$, $y \leq f(b)$
 $\vdash \exists x : \mathbb{R}, f(x) = y.$

Exo 4

Rappelez la définition de $[a, b]$ (celle utilisée ci-dessus);
ou, si vous préférez :

dans l'exemple précédent, écrivez le contexte intermédiaire entre l'explicitation et la tactique.

La tactique ExistC

La tactique ExistC

- le sens de cette tactique est que savoir $\exists x : E, P(x)$, c'est comme avoir un x vérifiant $P(x)$
- elle s'applique lorsque le contexte courant comporte une hypothèse de la forme $\exists x : E, P(x)$
- elle a un argument, qui est cette hypothèse (pour le cas où il y a plusieurs hypothèses de cette forme)
- elle remplace l'objectif courant

$$C'; \exists x : E, P(x); C'' \vdash G$$

par

$$C'; x : E; P(x); C'' \vdash G$$

- elle est gratuite
- c'est encore une tactique qui ne laisse pas de trace écrite

Exemple pour la tactique Exists au contexte I

Exemple

Je suis en train de démontrer que si f et g sont majorées alors $f + g$ est majorée. Mon objectif courant est

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ majorée}; g \text{ majorée} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

J'explicité la première hypothèse en $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$ puis j'applique la tactique Exists au contexte.

Mon objectif courant devient :

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; M : \mathbb{R}; \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M; g \text{ majorée} \\ \vdash f + g \text{ majorée.}$$

Exo 5

Ecrivez l'objectif courant après une seconde application de la tactique ExistC.

Exemple pour la tactique Exists au contexte II

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est monotone, alors $f[a, b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon objectif courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante}; a, b : \mathbb{R}; a \leq b; y : \mathbb{R}; y \in f[a, b] \\ \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

J'explicité $y \in f[a, b]$ en $\exists x : [a, b], y = f(x)$ puis j'applique la tactique Exists au contexte.

Mon objectif courant devient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante}; a, b : \mathbb{R}; a \leq b; y : \mathbb{R}; x : [a, b]; y = f(x) \\ \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

La tactique Ou au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A or B , il suffit de traiter successivement le cas où A est vrai, puis celui où B est vrai
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A or B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs de cette forme)
- elle remplace l'objectif courant $(C', A \text{ or } B, C'' \vdash G)$ par les deux objectifs $(C', A, C'' \vdash G)$ et $(C', B, C'' \vdash G)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire (quelque chose de plus court que) : "On sait qu'on a A or B . Commençons par supposer A Et maintenant supposons B"

Exemple pour la tactique OuC I

Exemple

Je cherche à montrer que une fonction f est monotone, alors $f \circ f$ est croissante. J'ai fait ForallB et ImpB et mon objectif courant est

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ monotone} \vdash f \circ f \text{ croissante}$

J'explicité l'hypothèse " f monotone" en

$"f \text{ est croissante ou } f \text{ est décroissante}"$

et j'applique la tactique OuC.

Mon objectif courant devient :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ croissante} \vdash f \circ f \text{ croissante}$

Exo 6

Cette dernière tactique a mis un nouvel objectif en attente.

Lequel ?

Exemple pour la tactique OuC II

Exemple

Je cherche à montrer que la composée de deux fonctions monotones est monotone.

Mon objectif courant est

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$ monotone, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g$ monotone $\vdash f \circ g$ monotone

J'explicité l'hypothèse “ f monotone” en

“ f est croissante ou f est décroissante”

et j'applique cette tactique Ou au contexte.

Mon objectif courant devient :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$ croissante, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g$ monotone $\vdash f \circ g$ monotone

Exo 7

Cette dernière tactique a mis un nouvel objectif en attente.

Lequel ?

La tactique Et au but

La tactique Et au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver A and B , il suffit de prouver A puis B
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme A and B
- elle n' a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant $(C \vdash A \text{ and } B)$ par les deux objectifs : $(C \vdash A)$ et $(C \vdash B)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire (quelque chose de plus court que) : Nous devons prouver A and B . Pour cela, commençons par prouver A Et maintenant prouvons B

Exemple pour la tactique EtB

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est croissante, alors $f[a, b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon objectif courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ croissante}, a : \mathbb{R}, b : \mathbb{R}, a \leq b, y : \mathbb{R}; y \in f[a, b] \quad \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

J'explicité $y \in [f(a), f(b)]$ en $f(a) \leq y$ and $y \leq f(b)$ puis

j'applique la tactique EtC. Mon objectif courant devient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ croissante}, a : \mathbb{R}, b : \mathbb{R}, a \leq b, y : \mathbb{R}; y \in f[a, b] \quad \vdash f(a) \leq y.$$

Exo 8

Cette dernière tactique a aussi mis un nouvel objectif en attente.
Lequel ?

La tactique OuB

La tactique Ou au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver $A \text{ or } B$, il suffit de prouver de prouver B en supposant A faux, ou alors de prouver A en supposant B faux
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $A \text{ or } B$
- elle a un argument qui est soit gauche (on choisit de prouver A) soit droite (on choisit de prouver B).
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash A \text{ or } B$
si son argument est gauche par $C, \overline{B} \vdash A$
et si son argument est droite par $C, \overline{A} \vdash B$
- elle est gratuite
- par exemple dans le cas de l'argument droit, on peut écrire :
Supposons que A est faux, et prouvons B ...

Exemple pour la tactique OuB

Exemple

J'essaie encore de démontrer que pour que si f est monotone, $f \circ f$ l'est aussi. Mon objectif courant est

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante} \vdash f \circ f \text{ monotone.}$$

J'explicité le but puis j'applique à gauche la tactique OuB. Mon objectif courant devient :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante}; f \circ f \text{ non décroissante} \vdash f \circ f \text{ croissante.}$$

Exo 9

Bob en est au même point dans la preuve du même énoncé. Comme c'est un boulet, il applique la bonne tactique, mais à droite. Quel est son nouvel objectif ?