

Image d'une application linéaire

Dédou

Mai 2012

Le séquent initial

Le séquent initial, c'est

$\vdash \forall E, F : \text{EspVec}, \forall u : E \rightarrow F, u \text{ linéaire} \Rightarrow u(E) \text{ est un sev de } F.$

On fait tout ce qui est gratuit :

La première salve

Le séquent initial, c'est

$\vdash \forall E, F : EspVec, \forall u : E \rightarrow F, u \text{ linéaire} \Rightarrow u(E) \text{ est un sev de } F.$

On fait tout ce qui est gratuit :

ForallB, ForallB, ForallB, ImpB, ReecB, EtB, ReecB

Et le nouveau séquent, c'est quoi ?

La première salve

Le séquent initial, c'est

$\vdash \forall E, F : EspVec, \forall u : E \rightarrow F, u \text{ linéaire} \Rightarrow u(E) \text{ est un sev de } F.$

On fait tout ce qui est gratuit :

ForallB, ForallB, ForallB, ImpB, ReecB, EtB, ReecB

Le nouveau séquent, c'est

$E, F : EspVec; u : E \rightarrow F; u \text{ linéaire} \vdash \exists x : E, u(x) = 0.$

La deuxième salve

Le nouveau séquent, c'est

$$E, F : \text{EspVec}; u : E \rightarrow F; u \text{ linéaire} \vdash \exists x : E, u(x) = 0.$$

On prend 0 à témoin :

ExistB (0)

$$\forall E, F : \text{EspVec}; \forall u : E \rightarrow F; u \text{ linéaire} \vdash u(0) = 0.$$

Et on invoque :

$$\forall E, F : \text{EspVec}; \forall u : E \rightarrow F; u \text{ linéaire} \Rightarrow u(0) = 0.$$

InvoC, ForallC, ForallC, ForallC, ImpC, Hyp, Hyp

La troisième salve

Le nouveau séquent, c'est

$E, F : \text{EspVec}; u : E \rightarrow F; u \text{ linéaire}$

$\vdash \forall y, y' : F, \forall a, a' : \mathbb{R}, y \in u(E) \text{ et } y' \in u(E) \Rightarrow ay + a'y' \in u(E).$

On fait presque tout ce qui est gratuit :

ForallB, ForallB, ForallB, ForallB, ImpB, EtC, ReecC, ReecC,
ExistC, ExistC

Le nouveau séquent, c'est

$E, F : \text{EspVec}; u : E \rightarrow F; u \text{ linéaire};$

$y, y' : F; a, b : \mathbb{R}; x, x' : E; u(x) = y; u(x') = y'$

$\vdash ay + a'y' \in u(E).$

Le coup de grâce

Le séquent courant, c'est

$E, F : \text{EspVec}; u : E \rightarrow F; u \text{ linéaire};$
 $y, y' : F; a, b : \mathbb{R}; x, x' : E; u(x) = y; u(x') = y'$

$$\vdash ay + a'y' \in u(E).$$

On prend $ax + a'x'$ à témoin, et le but devient

$$\vdash u(ax + a'x') = ay + a'y'.$$

On le réécrit :

$$\vdash u(ax + a'x') = au(x) + a'u(x').$$

Et on applique la linéarité :

ExistB, ReecB, ReecB, ReecC, 4ForallC, Hyp.