

# Fonction caractéristique

Dédou

Mars 2012

# Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$

a la carte de visite suivante

$$\begin{aligned}\chi_A : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{B} \\ x &\mapsto x \in A\end{aligned}$$

Exemple

La fonction caractéristique de  $I := [0, +\infty[$  est la fonction

$$\chi_I := \text{if } x \geq 0 \text{ then } V \text{ else } F.$$

# Fonction caractéristique et opérations

La fonction caractéristique d'une intersection  
est la conjonction des fonctions caractéristiques :

Exo corrigé

Formaliser et prouver ça.

# Fonction caractéristique et opérations

La fonction caractéristique d'une réunion

est la disjonction des fonctions caractéristiques :

Exo 4

Formaliser et prouver ça.

La fonction caractéristique d'un complémentaire

est la négation de la fonction caractéristique initiale.

# La construction support

Voici la carte de visite de la construction support

$$\begin{aligned} \text{supp} : (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}) &\rightarrow \text{Ens} \\ P &\mapsto \text{supp}(P) \\ P &\mapsto \{x : \mathbb{R} \mid P(x)\} \end{aligned}$$

- $\{x : \mathbb{R} \mid P(x)\}$  se lit  
"l'ensemble des  $x$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant (ou tels que)  $P(x)$ "
- les éléments de cet ensemble sont les réels vérifiant  $P$
- dans  $\{x : \mathbb{R} \mid P(x)\}$ , la variable  $x$  est liée
- on a donc  $\{x : \mathbb{R} \mid P(x)\} = \{y : \mathbb{R} \mid P(y)\}$ .

## Exemple

On a  $\{x : \mathbb{R} \mid x > e \text{ et } x < \pi\} = ]e, \pi[$ .

# Les éléments d'un support

Comme son nom l'indique

Les éléments de  $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$  sont les réels vérifiant  $P$

On a donc la règle d'explicitation :

$\forall a : \mathbb{R}, \forall P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B},$

$$a \in \{x : \mathbb{R} | P(x)\} \Leftrightarrow P(a).$$

Exemple

On a  $e + \pi \in \{x : \mathbb{R} | x^2 \leq x\}$  ssi  $(e + \pi)^2 \leq e + \pi$ .

Exo 5

Explicitiez  $1 + \sqrt{2} \in \{x : \mathbb{R} | x^2 - x - 1 = 0\}$ .

# Support et fonction caractéristique

L'application support :  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$

est bijective et sa réciproque est l'application "fonction caractéristique" :  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B})$ .

Exo corrigé

Formaliser ça.

Exo 6

Prouver ça.