

Exhiber, appliquer

Dédou

Janvier 2012

La tactique Exists au but

La tactique Exists au but

- le sens de cette tactique est que prouver $\exists x : E, P(x)$, c'est donner un "témoin" t vérifiant $P(t)$
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $\exists x : E, P(x)$
- elle a un argument (essentiel!) : le témoin t
- elle remplace l'objectif courant
par
$$\begin{array}{l} C \vdash \exists x : E, P(x) \\ C \vdash P(t) \end{array}$$
- elle est tout sauf gratuite
- on peut écrire par exemple :
"Prenons t pour témoin"
- ou encore
"Montrons que t convient".

Exemple pour la tactique Existe au but

Exemple

Je suis en train de démontrer que si f et g sont majorées alors $f + g$ est majorée. Mon objectif courant est

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; M, N : \mathbb{R}; f$ majorée par $M; g$ majorée par N
 $\vdash f + g$ majorée.

J'explicité le but et je prends $M + N$ comme témoin

Mon objectif courant devient :

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; M, N : \mathbb{R}; f$ majorée par $M; g$ majorée par N
 $\vdash \forall x : \mathbb{R}, (f + g)(x) \leq M + N.$

Exo corrigé

Dans l'exemple ci-dessus, quelle est la définition de "majorée" qui est mise en oeuvre ?

La tactique Forall au contexte

La tactique Forall au contexte

- le sens de cette tactique est que, si on sait $\forall x : E, P(x)$, on sait a fortiori $P(a)$ pour n'importe quel élément a de E
- elle s'applique lorsqu'une hypothèse du contexte courant est de la forme $\forall x : E, P(x)$
- elle a deux arguments, un qui est l'hypothèse en question (il peut y en avoir plusieurs) et l'autre qui est l'argument choisi a
- elle remplace l'objectif courant

$$C'; \forall x : E, P(x); C'' \vdash G$$

par

$$C'; P(a); C'' \vdash G.$$

- sous cette forme elle n'est pas trop gratuite, mais on va arranger ça (plus loin)
- on peut écrire par exemple :
"Si on applique notre hypothèse à a , on obtient $P(a)$."

On a vu 9 tactiques

- Deux Et
- Deux Ou
- Deux \forall
- Deux \exists
- Un seul Implique ...

La tactique Implique au but

- le sens de cette tactique est que pour prouver $A \Rightarrow B$, il faut (ou suffit de) prouver B sachant A
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $A \Rightarrow B$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant ($C \vdash A \Rightarrow B$) par l'objectif $C; A \vdash B$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "Nous devons prouver $A \Rightarrow B$. Pour cela, supposons A et prouvons B ."

Décomposition de la tactique Implique au but

La tactique Implique

s'obtient par la recette suivante :

- remplacer $A \Rightarrow B$ par sa définition (\bar{A} or B)
- appliquer la tactique Ou (à droite) au nouveau but.

La tactique Implique au contexte

La tactique Implique au contexte

- le sens de cette tactique est que, si on sait $A \Rightarrow B$, et si on sait prouver A , on peut supposer B
- elle s'applique lorsqu'une hypothèse courante est de la forme $A \Rightarrow B$
- elle a cette hypothèse comme argument mais on s'en fout
- elle remplace l'objectif courant $C; A \Rightarrow B; D \vdash G$ par les deux objectifs $C; A \Rightarrow B; D \vdash A$ et $C; B; D \vdash G$
- elle n'est pas "gratuite" (A peut être faux)
- on peut écrire par exemple : "On va montrer qu'on a A et donc B ".

Exo corrigé

Peut-on réduire cette tactique aux autres ?

Retour sur la tactique ForallC

Sous la forme suivante

$$\frac{C'; P(a); C'' \vdash G}{C'; \forall x : E, P(x); C'' \vdash G}$$

la tactique ForallC n'est pas gratuite, elle "consomme" une hypothèse, ce qu'on pourrait regretter.

On peut lui préférer la variante gratuite

$$\frac{C'; P(a); \forall x : E, P(x); C'' \vdash G}{C'; \forall x : E, P(x); C'' \vdash G}$$

En fait on a toujours le droit d'oublier, ou de dupliquer une hypothèse.

Oublier et dupliquer

Pour oublier, on a la tactique Affaiblir :

$$\frac{C'; C'' \vdash G}{C'; H; C'' \vdash G}$$

Pour dupliquer, on a la tactique Contracter :

$$\frac{C'; H; H; C'' \vdash G}{C'; H; C'' \vdash G}$$

Ces deux tactiques ne laissent jamais de trace dans les preuves écrites par les mathématiciens.