

# Induction

Dédou

Mars 2012

## La tactique Induction 1

- on connaît bien cette tactique
- elle s'applique quand le but est de la forme  $\forall n : \mathbb{N}, P(n)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant

$$C \vdash \forall n : \mathbb{N}, P(n) \text{ ou } C, n : \mathbb{N} \vdash P(n)$$

par les deux objectifs

$$C \vdash P(0) \text{ et } C, n : \mathbb{N}, P(n) \vdash P(n + 1)$$

- elle est “gratuite”
- on peut écrire par exemple :  
“Raisonnons par récurrence sur  $n$  ...”

# Exemple

Le théorème de la division euclidienne.

## La tactique Induction 2

- on connaît bien cette tactique
- elle s'applique quand le but est de la forme  $\forall n : \mathbb{N}, P(n)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant

$$C \vdash \forall n : \mathbb{N}, P(n) \text{ ou } C, n : \mathbb{N} \vdash P(n)$$

par l'objectif

$$C, n : \mathbb{N}, \forall p : \mathbb{N}, p < n \Rightarrow P(p) \vdash P(n)$$

- elle est “gratuite”
- on peut écrire par exemple :  
“Supposons que  $P(p)$  est vrai pour  $p < n$  et montrons  $P(n)$ .  
...”

# Exemple

Le théorème de la division euclidienne.

## Encore un exemple

Toute partie de  $\mathbb{N}$  non vide et majorée admet un plus grand élément.

## Exo 1

Démontrer que toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.