 Applications

1. Restreindre, prolonger

- Prouver que toute restriction d'une application injective est injective.
- Montrer qu'une application admettant un prolongement injectif est elle-même injective.
- Prouver que tout prolongement d'une application surjective est surjectif.
- Montrer qu'une application admettant une restriction surjective est elle-même surjective.
- Prouver qu'un prolongement d'une application injective n'est pas forcément injectif.
- Prouver que la restriction d'une application surjective n'est pas forcément surjective.
- Prouver que la fonction racine carrée admet au moins deux prolongements bijectifs à $\mathbf{R}$ tout entier.
- Prouver que la fonction logarithme admet au moins deux prolongements surjectifs à $\mathbf{R}$ tout entier.
- Prouver que la fonction logarithme n'admet aucun prolongement injectif à $\mathbf{R}$ tout entier.
- Montrer qu'une application admettant une restriction surjective est elle-même surjective.

2. Reconnaître un graphe

a) Dire si la partie suivante suivante de $\mathbf{R}^2$ est une fonction. Si oui, indiquer son dommaine de définition.

- $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^3=y^3\}$.
- $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x\neq y\}$.
- $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|e^x=e^y+1\}$.
- $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|[x]\leq y\leq [x+0.01]\}$.
- $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^2=y^3\}$.
- $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x^3=y^2\}$.
- $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2||x|=\sqrt{y^2}\}$.

b) Mêmes questions avec $\mathbf{N}\times\mathbf{R}$.

- $\{(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}|x\leq n\leq x+1\}$.
- $\{(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}|n<x<n+1\}$.
- $\{(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}|x=n\}$.
- $\{(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}|x^3=n^2\}$.

c) Mêmes questions avec $\mathbf{R}\times\mathbf{N}$.

- $\{(x,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}|x\leq n\leq x+1\}$.
- $\{(x,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}|x<n<x+1\}$.
- $\{(x,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}|y\leq n\leq y+1\}$.
- $\{(x,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}|x\leq e^n\leq x+1\}$.