MatDis Exos2

Ensembles et parties

02/02/09 L1M

1. Expliciter

a) Préciser un contexte plausible et expliciter chacun des énoncés suivants:

$2 + x \in \{u_{n+p} | n \in \mathbf{N}\}$ $\quad f(2) \in \{x \in \mathbf{R} | \sin x \leq \cos x\}$ $\quad \ln x \notin \{y \in \mathbf{R} | \cos y = u_n\}$
$27 \notin \{\theta + 2k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$ $\quad \{x \in \mathbf{R} | \forall n \in \mathbf{N}, x \geq u_n\} \subset \{x \in \mathbf{R} | \forall n \in \mathbf{N}, x \geq v_n\}$
$\{x \in \mathbf{R} | x^3 - x + 1 = m\} \subset \{y \in \mathbf{R} | y^2 \leq 1\}$ $\quad \{x \in \mathbf{R} | \forall n \in \mathbf{N}, x \leq u_n\} = \{x \in \mathbf{R} | \forall n \in \mathbf{N}, x < u_n\}$
$\{x \in \mathbf{R} | P(x) = 1\} \subset \{au_0 + bu_1 | a, b \in \mathbf{N}\}$ $\quad (3, 4) \in \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = f(a) + (x - a)f'(a)\}$
$\{x \in \mathbf{R} | P(x) = 1\} = \emptyset$ $\quad \{n \in \mathbf{N} | u_n \geq x\} \neq \emptyset$ $\quad \{\theta \in \mathbf{R} | 3\theta = k\pi\} = \{0\}$.

2. Propriétés de l'inclusion

Formaliser puis démontrer chacun des énoncés suivants :

- La partie vide de $\mathbf{R}$ est incluse dans la partie pleine.
- La partie vide est incluse dans toute autre partie de $\mathbf{R}$.
- Toute partie de $\mathbf{R}$ est incluse dans la partie pleine.
- Toute partie de $\mathbf{R}$ est incluse dans elle-même.
- Généraliser ce qui précède à un ensemble quelconque.

3. Propriétés du complémentaire

Formaliser puis démontrer chacun des énoncés suivants :

- Le complémentaire de la partie vide est la partie pleine.
- Le complémentaire de la partie pleine est la partie vide.
- Le complémentaire du complémentaire est la partie de départ.
- Deux parties ayant même complémentaire sont égales.
- Le passage aux complémentaires renverse les inclusions.
- Si le complémentaire de A est inclus dans celui de B, alors B est inclus dans A.

4. Propriétés de l'intersection

Formaliser puis démontrer chacun des énoncés suivants :

- L'intersection avec la partie vide est la partie vide.
- L'intersection avec la partie pleine est la partie de départ.
- L'intersection est associative et commutative.
- Toute partie est égale à son intersection avec elle-même.
- L'intersection entre une partie et son complémentaire est vide.
- Une partie est toujours égale à son intersection avec une autre partie dans laquelle elle est incluse.