MatDis Exos∞ # Révisions II 04/09 L1M

1. Préciser un contexte plausible et expliciter l'un des énoncés suivants:
   $\theta \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$ $\{x \in \mathbf{R} | x^3 - x = m\} \subset \{y \in \mathbf{R} | y^2 \leq 1\}$ $7 \in \{x \in \mathbf{R} | \forall n \in \mathbf{N}, x < u_n\}$
2. Ecrire la table de vérité de $\Longrightarrow$ ou de et.
3. Pour l'un au moins des énoncés suivants
   $\forall x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow \sin x \leq \sin y$; $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$:
   a) Calculer sa négation, sa contraposée, sa réciproque.
   b) Indiquer un contexte dans lequel il est vrai et un contexte dans lequel il est faux.
4. Indiquer un contexte dans lequel les deux énoncés suivants ne sont pas équivalents:
   $$\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq M \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}, f(x) \leq M.$$
5. a) Rappeler la définition de "f est monotone".
   b) Formaliser l'énoncé : si f est monotone sur $\mathbf{R}$, alors $2f$ l'est aussi.
   c) Donner une démonstration détaillée de l'énoncé précédent.
6. Expliquer pourquoi la partie suivante de $\mathbf{R} \times \mathbf{N}$ est ou n'est pas une application:
   $\{(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N} | 2x - 1 \leq n \leq 2x\}$, $\{(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N} | 1 - x \leq n < 2 - x\}$,
   $\{(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N} | n < e^x + 3 \leq n + 1\}$, $\{(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N} | n - 3 < x^2 \leq n - 2\}$.
7. Donner un énoncé formel du problème suivant :
   Existe-t-il deux entiers consécutifs dont le produit soit égal au carré de la somme?
8. Formaliser puis démontrer en termes de tactiques l'énoncé suivant :
   Pour que deux parties soient égales, il suffit que leurs complémentaires le soient.
9. Formaliser puis démontrer en langage usuel l'énoncé suivant :
   Si de deux parties l'une contient l'autre, alors le complémentaire de la plus petite contient celui de la plus grande.
10. Voici
    - un énoncé :
      Si une suite strictement positive tend vers 0, alors elle atteint son maximum.
    - et sa preuve:
      Soit une suite u strictement positive et tendant vers 0.
      Il existe donc un entier N tel que, pour $n \geq N$, on ait $u_n < u_0$. On conclut en observant que, pour tout entier n, on a $u_n \leq \max_{i=0}^{N} u_i$. Autrement dit, u atteint bien son maximum, et ce sur l'intervalle $[0..N]$, cqfd.
    - Quelle peut être la définition de convergence invoquée dans cette preuve?
    - A quel(s) argument(s) cette convergence est-elle appliquée?
    - Quel est le point faible de cette démonstration?