MatDis Exos5 # Prouver 03/09 L1M

1. Zoomer

Pour chacun des objectifs suivants, quelle tactique s'applique, qu'écrivez-vous dans votre preuve, comment évolue votre pile?

$(x : \mathbf{R}, H : -2 \leq x, K : x < 3; 0 \leq x \,\text{et}\, x \leq 9)$

$(x : \mathbf{R}, y : \mathbf{R}, H : y \leq x; x^2 \leq y^2 \Rightarrow y \leq 0)$

$(x : \mathbf{R}, H : (x-1)(x^2+2) = 0; x = 0 \,\text{ou}\, x = 1)$

$(x : \mathbf{R}, H : (x-1)(x+2) = 0; x = 1 \,\text{ou}\, x = -2)$

$(a : \mathbf{R}; \forall x : \mathbf{R}, x \leq \max(a, x))$

$(a : \mathbf{R}, b : \mathbf{R}, H : a < b; \exists x : \mathbf{R}, a < x < b)$.

2. Lire une preuve

Voici un énoncé:

Pour a **et** b **complexes, on a** $a.b = 0 \Longleftrightarrow (a = 0 \,\text{ou}\, b = 0)$.

suivi d'une preuve (disons sommaire) :

Preuve. Si par exemple $a = 0$, alors nous savons déjà que $a.b = 0.b = 0$. Supposons $a.b = 0$ et $a \neq 0$. Il vient $b = 1.b = ((1/a).a).b = (1/a).(a.b) = (1/a).0 = 0$. Cqfd.

a) reconstituez l'enchaînement des buts (avec leurs contextes) par les tactiques;

b) recensez les ressources utilisées;

c) donnez une preuve deux fois plus détaillée.

3. Formaliser et prouver

Formaliser puis prouver en détaillant bien les tactiques utilisées:

a) Si f est monotone sur $[0, +\infty[$, alors f est majorée ou minorée.

b) Si f est croissante, alors $-f$ est décroissante.

c) Si f est monotone, alors $-f$ l'est aussi.

d) Si f ou g est majorée, $\min(f, g)$ l'est aussi.

e) Si f et g sont majorées, alors $f + g$ l'est aussi.

f) f et g peuvent atteindre leur borne supérieure sans que ce soit le cas pour $f + g$.

4. Encore formaliser et prouver

Disons que f est mijorée si f est majorée ou minorée.

Formaliser puis prouver en détaillant bien les tactiques utilisées:

a) Si f et g sont mijorées, alors $f + g$ ou $f - g$ est mijorée

b) Si f ou g est mijorée, alors $\max(f, g)$ ou $\min(f, g)$ est mijorée.

c) f et g peuvent être mijorées sans que $f + g$ le soit.

d) $f + g$ peut être bornée sans que ni f ni g ne soient mijorées.