IUT Génie Mécanique et Productique
Université Paul Sabatier Toulouse 3

Module M115 - Probabilités et statistiques
Partie 1/2 : Loi binomiale, loi normale

1 Rappels de probabilités

1.1 Notions mathématiques

Factorielle n : n ! C'est le produit des n premiers entiers

$$n! = n.(n-1).\ldots.2.1 = n.(n-1)!$$

C_n^p **:** c'est le nombre de combinaisons différentes lorsque p objets distincts sont pris parmi n :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1.2 Probabilité

Définition 1 *La probabilité est une grandeur qui mesure ou estime les chances de succès ou d'insuccès d'événements dont le caractère est aléatoire.*

La probabilité d'un événement A (que l'évément A se réalise), notée $P(A)$ est un nombre compris entre 0 et 1.

La probabilité de non réalisation de A est $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple : A="les chiffres 3 ou 4 apparaissent lors du tirage d'un dé". Les différentes éventualités de l'expérience consistant à lancer un dé sont : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Toutes ces éventualités sont équiprobables. Donc $P(A) = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ est réalisé}}{\text{nombre total de cas}} = \frac{2}{6}$ et $P(A) = \frac{2}{3}$.

1.3 Propriétés des probabilités

Quels que soient les événements A et B, la probabilité qu'au moins l'un d'eux soit réalisé (événement noté $A \cup B$) est égale à la somme des probabilités pour que chacun d'entre eux soit réalisé diminué de la probabilité de leur réalisation simultanée :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

La probabilité pour que les deux événements soient réalisés est égale au produit de la probabilité pour que A se réalise par la probabilité pour que B se réalise sachant que A est réalisé :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B).$$

Événements incompatibles : A et B sont **incompatibles** entre eux s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps :

$$P(A \cap B) = 0 \text{ car } A \cap B = \emptyset, \text{ donc } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Événements indépendantss : A et B sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre. Dans le cas contraires, ils sont **liés**.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ car } P(A|B) = P(A) \text{ et } P(B|A) = P(B).$$

Remarques : $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.

2 Variables aléatoires

2.1 Généralités

Définition 2 *Une variable aléatoire (VA) est une variable X dont les valeurs obervées k, à l'issue d'épreuves effectuèes au cours d'un "jeu" (expérience), ne sont pas prévisibles à chaque épreuve particulière, mais forment un domaine déterminé et possèdent chacune une probabilité définie de se réaliser.*

Exemple : X : points obtenus en lançant 2 dés. Le domaine est $D = \{2, 3, \ldots, 12\}$ et la probabilité de l'événement $X = 2$ est
$P(X = 2) = P(\text{avoir 1 sur le premier dé et avoir 1 sur le second})$
$= P(\text{avoir 1 sur le premier dé}) \times P(\text{avoir 1 sur le deuxième dé}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

2.2 Distribution de la VA

On distingue 2 cas suivant le domaine des valeurs observées :

2.2.1 VA continue

Si D est une partie non dénombrable de $\mathbb{R}$, on dit que la VA est **continue**. Pour définir sa loi de probabilité, il suffit de donner la valeur de la probabilité pour tout intervalle de la forme $]-\infty, x]$:

$$F(x) = P(X \in]-\infty, x]) = P(X \leq x).$$

F est la **fonction de répartition** de X. $f(x) = F'(x)$ est la **densité de probabilité**.

Propriétés : $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$; $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

2.2.2 VA discète

Si D est discret, on dit que la VA est **discr̀ete**. On affecte à chaque valeur possible x de X la probabilité qu'elle a de se réaliser au terme d'une épreuve :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x; x_i \in D} P(X = x_i).$$

F est une **distribution cumulative**. Sa **loi de probabilité** est $P(X = x_i) = P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1})$.

Propriétés : $\sum_{x_i \in D} P(X = x_i) = 1$.

3 Espérance et variance

3.1 Espérance mathématique $E(X)$

Dans le cas continu,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Dans le cas discret,

$$E(X) = \sum_{x_i \in D} x_i P(x_i).$$

$E(X)$ s'identifie à la moyenne arithm{etique d'une distribution qui est un paramètre de la tendance centrale $m = E(X)$.

3.2 Variance $V(X)$

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

La variance de la distribution caractérise la dispersion autour de $E(X)$.

3.3 Propriétés

$E(a) = a$; $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$; $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$; $V(aX) = a^2V(X)$. Si on note m l'espérance et σ^2 la variance de X, la VA $X - m$ est **centrée** car $E(X - m) = 0$. La VA $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$ est **centrée réduite** car $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

4 Lois discrètes

4.1 Loi de Bernouilli

Soit $p \in]0, 1[$, on dit que X suit une loi de Bernouilli de paramètre p si X prend les valeurs 0 ou 1 avec la probabilité $P(X = 1) = p$.

$E(X) = 1 - p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

4.2 Loi binomiale

Soit $p \in]0, 1[$, on dit que X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ si X prend des valeurs comprises entre 0 et n avec les probabilités $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$. Cela revient à renouveler n fois une loi de Bernouilli de paramètre p.

$E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

4.3 Loi de Poisson

Soit λ, on dit que X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si X prend des valeurs entières avec les probabilités $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

$E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

5 Lois continues

5.1 Loi uniforme

On dit que X suit une loi uniforme sur $[0,1]$ si sa fonction densité est $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

$E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{12}$.

5.2 Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ ou loi de Laplace-Gauss

On dit que X suit une loi normale de paramètres m et σ si sa densité est $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a alors $E(X) = m$ et $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sigma^2$.

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit une loi **normale centrée réduite**. Dans tous les cas, $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Théorème de la limite centrée : on considère (X_n) une suite de VA indépendantes de même loi, de moyenne m et écart type σ, on note $S_n = \dfrac{X_1 + .. + X_n}{n}$, alors

$$\sqrt{n}\frac{S_n - m}{\sigma} \longrightarrow_{n \to +\infty} Z$$

La convergence en loi indique la convergence des fonctions de répartition.

6 Exemples d'application sur la loi binomiale et la loi normale

6.1 Loi binomiale

Une entreprise fabrique des lampes électriques vendues par lots de 10. Les contrôles de fabrication ont permis d'établir que 80% des lampes durent plus de 1000 heures d'utilisation.

1. **Quel est le nombre moyen de lampes d'un lot qui durent plus de 1000 heures ?**
   Chaque lampe dure soit plus de 1000 heures soit moins de 1000 heures, chaque événement a exactement 2 états. Les événements sont indépendants, donc on peut utiliser une loi binomiale $B(n = 10, p = 0.8)$ pour simuler la VA X = nombre de lampes d'un lot de 10 qui durent plus de 1000 heures. Le nombre moyen de lampes durant plus de 1000 heures est donc $E(X) = np = 8$.
2. **Quelle est la probabilité pour que toutes les lampes d'un lot durent plus de 1000 heures ?**
   On cherche $P(X = 10) = C_{10}^{10} 0.8^{10}(1 - 0.8)^0 = 0.1$.
3. **Quelle est la probabilité pour que toutes les lampes d'un lot durent moins de 1000 heures ?**
   On cherche $P(X = 0) = C_{10}^{0} 0.8^{0}(1 - 0.8)^{10} = 10^{-7}$.
4. **Quelle est la probabilité pour qu'au moins 8 lampes d'un lot durent plus de 1000 heures ?**

On cherche $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$ par indépendance des événements. Un calcul analogue au 2. avec 8 et 9 donne $P = 0.3 + 0.27 + 0.1 = 0.67$.

5. **Quelle est la probabilité pour qu'au plus 8 lampes d'un lot durent plus de 1000 heures ?**
   On cherche $P(X \leq 8) = P(X = 1) + ... + P(X = 8)$ mais c'est aussi égal à $1 - P(X > 8) = 1 - (P(X = 9) + P(X = 10)) = 1 - 0.27 - 0.1 = 0.63$.

6.2 Loi normale

Des lampes ont une durée de vie de moyenne 10.000 heures et d'écart type 200 heures. On modélise leur durée de vie par une loi normale.

1. **Si la garantie est de 9.700 heures, à quel pourcentage de retour clients peut-on s'attendre ?**
   On cherche la probabilité qu'une ampoule dure moins de 9700 heures : $P(X < 9700)$. Comme les tables de distribution de la loi normale n'indiquent les probabilités que pour une loi centrée réduite, on va travailler avec $Y = \dfrac{X - m}{\sigma} = \dfrac{X - 10000}{200}$. On a donc $P(X < 9700) = P(X - 10000 < 9700 - 1000) = P\left(\frac{X-10000}{200} < \frac{9700-10000}{200}\right) = P(Y < -1.5) = 0.067$ (valeur lue dans la table), donc on aura 6.7% de retour clients.
2. **Si on fixe ce pourcentage à 1%, quelle durée de vie devra-t-on indiquer ?**
   On doit trouver x et y tels que $P(X < x) = P(Y < y) = 0.01$. Dans la table, on trouve $y = -2.33$. Comme $y = \dfrac{x - 10000}{200} = -2.33$, on obtient $x = 9532$. Il faut donc garantir 9532 heures au plus.