III RESOLUTION ANALYTIQUE DES EQUATIONS LINEAIRES DU 2ème ORDRE

1 Introduction La plus simple de ces équations y" = 0 équivaut à $y = C_1x + C_2$ où C_1 et C_2 sont 2 réels arbitraires . De façon plus générale, les solutions de R[x,y,y',y"] = 0 (1) dépendent (sauf cas particuliers) de 2 constantes réelles arbitraires et leur détermination analytique n'est pas toujours possible, même dans le cas d'équations linéaires. On peut parfois se ramener au 1er ordre

$$xy''+y'=0 \quad (1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y'=z \\ xz'+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'=z \\ z=\dfrac{C_1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow y=C_1\ln|x|+C_2 \quad \text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

2 Equations linéaires (du 1er degré en y, y', y")

Définition Equation qui peut se ramener à l' écriture **a(x)y"+b(x)y'+c(x)y=d(x) (1)**
La resolution fait intervenir : **a(x) Y" + b(x) Y' + c(x) Y = 0 (2)** , équation dite homogène (ou sans second membre) associée à (1).

Théorème 1 : *Forme générale de la solution de (1)* : La solution y générale de (1), s'obtient en ajoutant à l'une de ses solutions particulières y_0 la solution Y générale de (2) : $\mathbf{y = y_0 + Y}$

La resolution de (1) n'est simple que si on connait des solutions particulières de (2)

Théorème 2 : *Recherche de la solution Y générale de (2)*: La solution générale de (2) est l'ensemble des combinaisons linéaires de 2 solutions particulières Y_1 et Y_2 linéairement indépendantes (non nulles et non proportionnelles) : $\mathbf{Y = C_1Y_1 + C_2Y_2}$ **où** $\mathbf{C_1}$ **et** $\mathbf{C_2 \in R}$

Par exemple e^x et e^{2x} sont 2 solutions de Y" - 3Y' + 2Y = 0, qui admet pour solution générale
$Y=C_1e^x + C_2e^{2x}$ où $(C_1,C_2) \in R^2$

Théorème 3 : *Recherche d'une solution y_0 particulière de (1)* : Si Y_1 et Y_2 sont 2 solutions particulières linéairement indépendantes de (2), il existe une solution particulière de (1) de la forme
$y_0 = C_1(x)Y_1 + C_2(x)Y_2$; où les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ vérifient le système du 1er ordre:

$$\begin{aligned} Y_1 C'_1 + Y_2 C'_2 &= 0 \\ Y'_1C'_1 + Y'_2C'_2 &= d(x)/a(x) \end{aligned}$$

Par exemple, en tenant compte des résultats de c), la recherche par le théorème 3 d'une solution particulière de y" -3y' +2y = xe^x (1) conduit au système

$$\begin{cases} e^x C'_1 + e^{2x} C'_2 = 0 \\ e^xC'_1 + 2e^{2x}C'_2 = xe^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'_2 = xe^{-x} \\ C'_1 = -x \end{cases}$$

En choisissant : $C_2 = -(1+x)e^{-x}$ et $C_1 = -x^2/2$, on obtient

pour solution particulière de (1) $y_0 = (-1-x-x^2/2)e^{2x}$ et
pour solution générale de (1) : $\mathbf{y= y_0 +Y = - (1+x+x^2/2)e^{2x} +C_1e^x + C_2e^{2x}}$
$\mathbf{(C_1,C_2)\in R^2}$

3) Equations linéaires à coéfficients constants

Définition : **$ay'' + by' + cy = d(x)$ (1) $a,b,c \in \mathbb{R}$**

Il est toujours possible de trouver Y et souvent de deviner la forme de y_0

Recherche de la solution Y générale de $aY'' + bY' + cY = 0$ (2)

En cherchant des solutions de la forme e^{rx} on trouve les résultats resumés dans le tableau

Racines de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ (3)	Solutions particulières réelles de (2)	Solution générale de $aY'' +bY' +cY=0$ (2)
s et t réelles distinctes	e^{sx} et e^{tx}	$C_1e^{sx}+ C_2e^{tx}$
$d=-b/2a$ réelle double	e^{dx} et xe^{dx}	$e^{dx} (C_1+C_2x)$
$\alpha\pm i\omega$ complexes conjuguées	$e^{\alpha x}\cos\omega x$ et $e^{\alpha x}\sin\omega x$	$e^{\alpha x} (C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x)$ ou $Ae^{\alpha x} \cos(\omega x-\varphi)$

Exemples : Les équations $Y''- 4Y' + 3Y = 0$; $Y'' -4Y' + Y = 0$; $Y'' -2Y' +2Y = 0$; $Y'' + \omega^2Y = 0$ ont des équations caractéristiques admettant pour racines : $(s,t) = (3,1)$; $d = 2$; $\alpha\pm i\omega=1\pm i$; $\alpha\pm i\omega=0\pm i\omega$ et pour solutions générales : $C_1e^{3x} + C_2e^{x}$; $e^{2x} (C_1x + C_2)$; $e^{x} (C_1\cos x + C_2\sin x)$; $C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$

Quelques cas simples de recherche de y_0

- **Si y_i est solution de (1) associée au 2ième membre $d_i (x)$, $\Sigma\, \alpha_i\, y_i$ est solution de (1) associée au 2ième membre $\Sigma\, \alpha_i\, d_i (x)$**

Par exemple, $-y'' + y = 1+2x$ admet pour sol. part. $1+2x$
$-y'' + y = \cos x$ admet pour sol. part. $\cos x/2$
$y'' + y = 1+2x - \cos x$ admet pour sol. part. $1+2x - \cos x/2$

- **Pour d(x) polynôme, il existe une solution particulière polynômiale**

Par exemple, une sol. part. de $y'' - 4y'+ 3y = 6x+1$ (1) est à chercher sous la forme $y = Ax + B$ pour laquelle $y' = A$ et $y'' = 0$. (1) s'écrit alors : $3Ax + (3B-4A) = 6x + 1$; $2x+3$ est sol. part. de (1)

- **Pour $d(x) = e^{mx}f(x)$, le changement de fonction $y \to z$ où $z = e^{mx}y$ permet de ramener (1) à une équation ayant pour second membre f(x)**

Notons qu'alors : $z' = e^{mx} (my+y')$ et $z'' = e^{mx} (m^2y+2my'+ y'')$

Par exemple, le changement de fonction défini par $z = e^{-2x} y$ dans l'équation (1) $y'' - y = (6x+1)e^{-2x}$ conduit à $e^{-2x} (z''- 4z'+ 3z) = e^{-2x} (6x+1)$ soit à $z''- 4z'+ 3z =6x+1$ qui admet $z=2x+ 3$ pour solution particulière; $y=(2x+ 3) e^{2x}$ est solution particulière de (1)

- **Pour $d(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, fonction de pulsation ω ; si $\sin\omega x$ n'est pas solution de (2) il existe une sol. part. de (1) $C\cos\omega x+D\sin\omega x$ de même pulsation ω; sinon il existe une sol. part. de (1) la forme $x(C\cos\omega x + D\sin\omega x)$,les réels C et D étant à déterminer**

Par exemple $y'' + y = \cos\omega x$ admet pour sol. part. $(\cos\omega x)/(1-\omega^2)$ si $\omega \# \pm 1$ et $(x\sin x)/2$ si $\omega =\pm 1$.