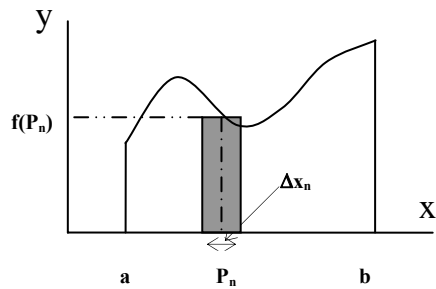


# DEFINITION des INTEGRALES MULTIPLES

**f continue dans  $D=]a,b[$  ouvert borné de  $\mathbb{R}$**



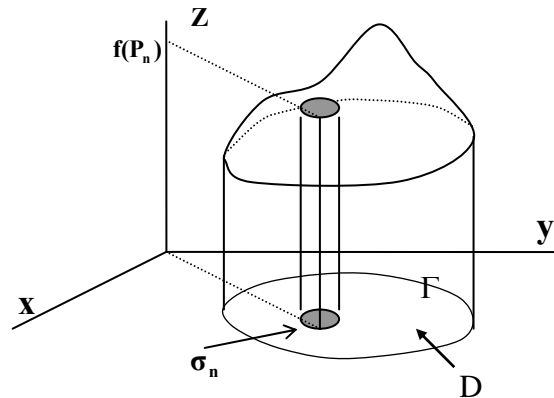
$$I = \text{Aire} \{ (x,y) / a < x < b ; 0 < y < f(x) \}$$

Subdivision admissible de  $D=]a,b[$  :  $\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots\}$  :  
 $\cup \Delta x_n = D$  ;  $\text{long}(\Delta x_i \cap \Delta x_j) = 0$  ;  $\sup(\Delta x_n) \rightarrow 0$

DEFINITION :  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n f(P_n) \Delta x_n$

NOTATIONS :  $I = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$

**f continue dans  $D$  ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^2$  limité par une courbe fermée simple  $\Gamma$  continue**



$$I = \text{Vol} \{ (x, y, z) / (x, y) \in D ; 0 < z < f(x, y) \}$$

Subdivision admissible de  $D \subset \mathbb{R}^2$  :  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$   
 $\cup \sigma_n = D$  ;  $\text{surf}(\sigma_i \cap \sigma_j) = 0$  ;  $\sup(\text{surf}(\sigma_n)) \rightarrow 0$

DEFINITION :  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n f(P_n) \text{surf}(\sigma_n)$

NOTATIONS :  $I = \int_D f = \iint_D f(x, y) dx dy$

**f continue dans  $D$  ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^3$  limité par une surface fermée simple  $\Gamma$  continue**

INTERPRETATION Extension d'une Intégrale double

Subdivision admissible de  $D \subset \mathbb{R}^3$  :  $\{v_1, v_2, \dots\}$  :  
 $\cup v_n = D$  ;  $\text{vol}(v_i \cap v_j) = 0$  ;  $\sup(\text{vol}(v_n)) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$

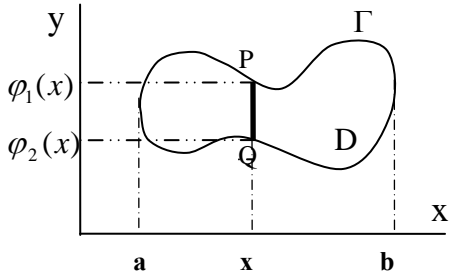
DEFINITION :  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n f(P_n) \text{vol}(v_n)$

NOTATIONS :  $I = \int_D f = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$

**METHODES de CALCUL de**  $I = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_D f$

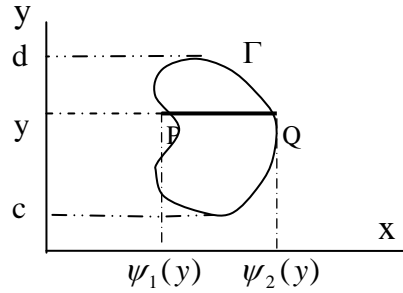
**f** continue dans **D** ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (limité par une courbe fermée  $\Gamma$  continue)

$\Gamma$  coupée en 2 points au plus par toute parallèle à Oy



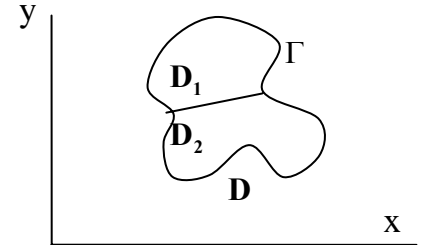
$$I = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

$\Gamma$  coupée en 2 points au plus par toute parallèle à Ox



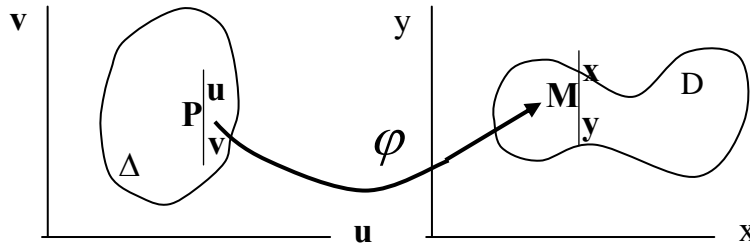
$$I = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

**D** plus complexe  
 $D = D_1 \cup D_2$  ;  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$



$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

**CHANGEMENT de VARIABLES**



$M = \varphi(P)$  ;  $\varphi$  bijection bidifférentiable

$$\underset{\text{Jacobien}}{J} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u = \frac{1}{u'_x v'_y - u'_y v'_x} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\Delta} \underbrace{f(x(u,v), y(u,v))}_{\text{fonction}} \underbrace{|J|}_{\text{Jacobien}} du dv$$

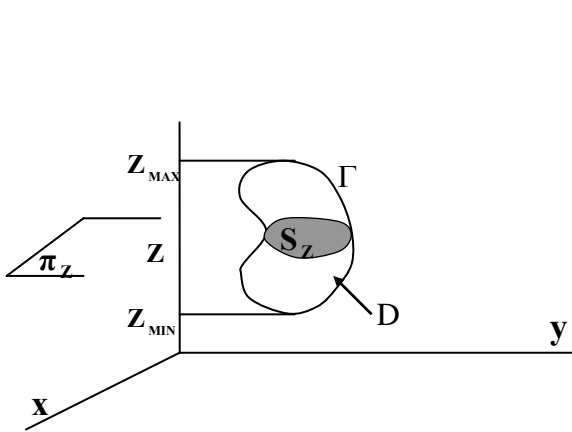
En coordonnées polaires  $u = \rho$   $v = \theta$

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \quad (\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$J = \rho$$

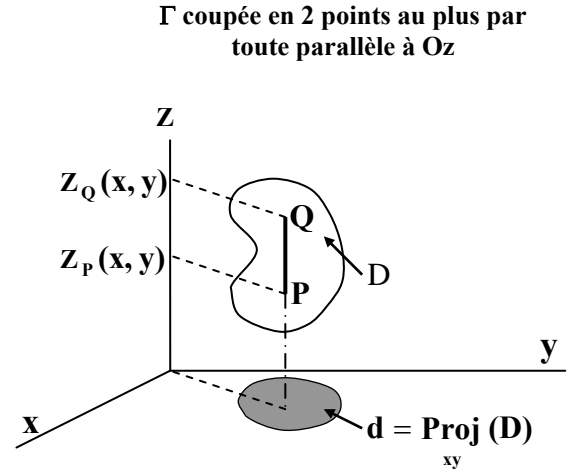
METHODES de CALCUL de  $I = \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \int_D f$

$f$  continue dans  $D$  ouvert de  $\mathbb{R}^3$  (limité par une surface fermée  $\Gamma$  continue)



$$I = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left[ \iint_{S_z} f(x,y,z) dx dy \right] dz$$

$z$  constant

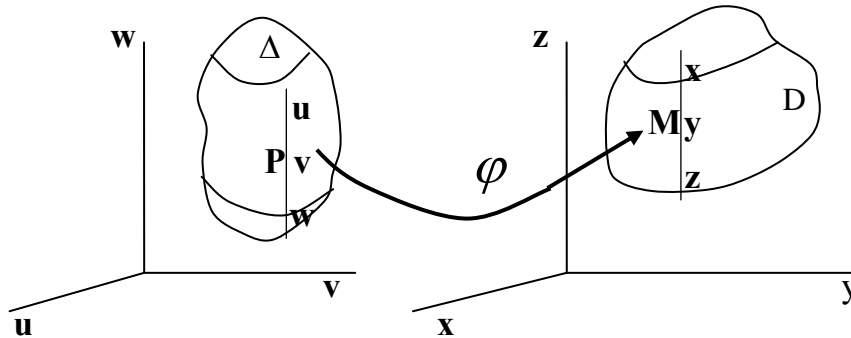


$$I = \iint_d \left[ \int_{z_P(x,y)}^{z_Q(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dx dy$$

$x,y$  constants

D'autres expressions sont obtenues en permutant les variables  $x,y,z$

### CHANGEMENT de VARIABLES



$M = \varphi(P)$  ;  $\varphi$  bijection bidifférentiable

$$\underset{\text{Jacobien}}{J} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$$

$$I = \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} \underbrace{f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))}_{\text{fonction}} \underbrace{|J|}_{\text{Jacobien}} du dv dw$$

En coordonnées polaires

$u = \rho \quad v = \theta \quad w = z$

$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \quad (\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$

$J = \rho$

En coordonnées sphériques

$u = r \quad v = \theta \quad w = \varphi$

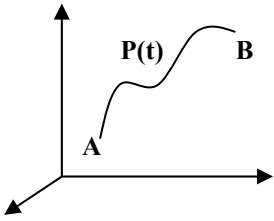
$x = r \cos \varphi \cos \theta \quad y = r \cos \varphi \sin \theta \quad z = r \sin \varphi$

$r > 0 \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

$J = r^2 \cos \varphi$

# SYSTEME MATERIEL $\Sigma$

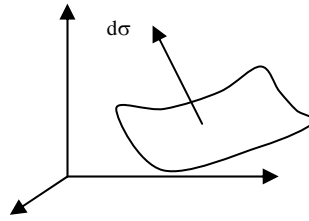
$\Sigma$  fil de  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ )  
Intégrale curviligne



$$dm = \mu(P) * dl$$

élément de masse	masse linéique	élément de longueur
------------------	----------------	---------------------

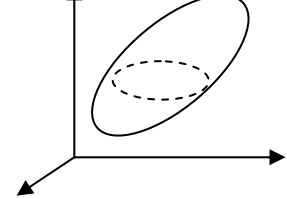
$\Sigma$  plaquede  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ )  
Intégrale de surface



$$dm = \mu(P) * |d\sigma|$$

élément de masse	Masse surfacique	élément de surface
------------------	------------------	--------------------

$\Sigma$  plaquede  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ )  
Intégrale de volume



$$dm = \mu(P) * dv$$

élément de masse	Masse volumique	élément de volumee
------------------	-----------------	--------------------

$\Sigma$  est homogène ssi  $\mu(P)$  est constant  $\forall P \in \Sigma$

MASSE M de $\Sigma$	$M = \int_{P \in S} dm$
---------------------	-------------------------

$$M = \int_{P \in S} \mu(P) dl$$

=  $\mu * \text{longueur}(S)$  si S homogène

$$M = \int_{P \in S} \mu(P) d\sigma$$

=  $\mu * \text{aire}(S)$  si S homogène

$$M = \int_{P \in S} \mu(P) dv$$

=  $\mu * \text{vol}(S)$  si S homogène

CENTRE de GRAVITE G de $\Sigma$	$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_{P \in S} \vec{OP} dm$
---------------------------------	---

$$X_G = \frac{\int_{P \in S} x dm}{\int_{P \in S} dm}$$

$$Y_G = \frac{\int_{P \in S} y dm}{\int_{P \in S} dm}$$

$$Z_G = \frac{\int_{P \in S} z dm}{\int_{P \in S} dm}$$

MOMENT d'INERTIE de $\Sigma$ par rapport à H (Point - Droite ou Plan)	$I_H(S) = \int_{P \in S} D^2(P, H) dm$
---	--

$D^2(P, H)$  étant la distance du point P à H

**Théorème 1 (Pythagore) :**

$$I_o = I_{xoy} + I_{yoz} + I_{yox} = \frac{1}{2} (I_{ox} + I_{oy} + I_{oz})$$

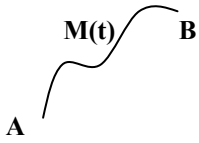
$$I_{ox} = I_{xoy} + I_{xoz}$$

**Théorème 2 (Koenig-Huyghens)**  $H_G$  est selon les cas le point G, la droite ou le plan parallèle à H passant par G

$I_H = I_{H_G} + M * D^2(H, H_G)$
-----------------------------------

**LONGUEUR d'un ARC PARAMETRE**  $AB = \{M(t) = (x(t), y(t), z(t)); t \in [t_A, t_B]\}$

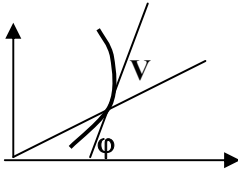
Dans l'espace  $R^3$  : Abscisse curviligne de B sur l'arc d'origine A, orienté dans le sens des t croissants



$$AB = s(B) = \int_{AB} |\vec{dM}| = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \quad \frac{\vec{dM}}{ds} \text{ est un vecteur unitaire porté par la tangente}$$

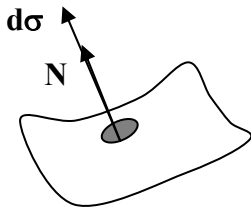
Dans le plan  $R^2$   $ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$   $l(AB) = \int_{AB} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$



$$\cos \varphi = \frac{dx}{ds}; \quad \sin \varphi = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos V = \frac{dx}{d\rho}; \quad \sin V = \frac{dy}{d\rho}$$

**AIRE d'une NAPPE PARAMETREE**  $S = \{M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)); (u,v) \in \Delta\}$

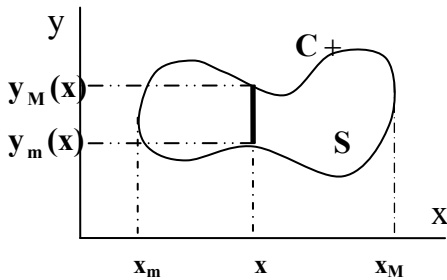


$$N = M'_u \wedge M'_v \text{ est normal en M à S}$$

$$d\sigma = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \quad (= N du dv \text{ au point } M(u,v) \text{ de la surface})$$

$$\text{Aire}(S) = \int_{M \in S} |d\sigma| = \iint_{(u,v) \in \Delta} |N| du dv$$

Nappe Plane: S limitée par le contour direct  $C_+$

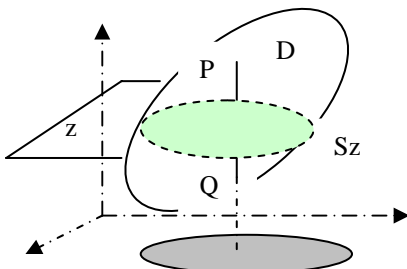


$$\text{Aire}(S) = \iint_S dx dy = \int_{x_m}^{x_M} [y_M(x) - y_m(x)] dx$$

$$= \iint_S \rho d\rho d\theta dz \text{ (en polaire)}$$

$$= \int_{C_+} x dy - \int_{C_+} y dx = \int_{C_+} \frac{x dy - y dx}{2} = \int_{C_+} \frac{\rho^2 d\theta}{2}$$

**VOLUME d'un DOMAINE D de  $R^3$**



$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx dy dz = \iiint_D |\rho| d\rho d\theta dz = \iiint_D r^2 |\cos \varphi| dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_{z_m}^{z_M} \text{Aire}(S_z) dz = \iint_{\text{Proj}_{xy} D} [z_P(x,y) - z_Q(x,y)] dx dy$$

# SURFACES de $\mathbb{R}^3$

**CARTESIENNE :**  $[S]=\{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; S(x,y,z)=0\}$

**Vecteur normal en M à [S] :** gradient de S en M :  $\delta S_{(M)}=(S'_x, S'_y, S'_z)$

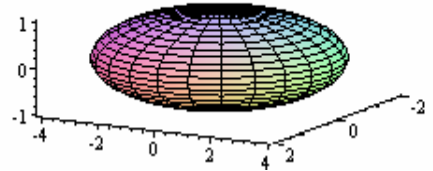
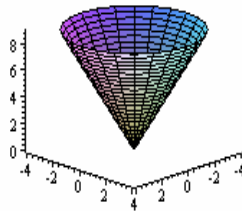
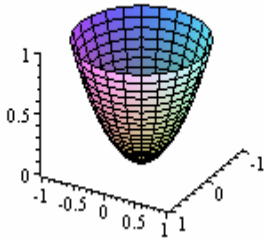
**Plan tangent en M à [S] =**  $\{P(X,Y,Z) : S'_x(X-x)+ S'_y(Y-y)+ S'_z(Z-z)=0\}$

*Rmq Pour la surface  $z=f(x,y)$  ;  $S(x,y,z)=f(x,y)-z$  ;  $\delta S_{(M)}=(f'_x f'_y, -1)$*

**PARAMETREE :**  $[S]=\{M(u,v) =(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \in \mathbb{R}^3; (u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2\}$

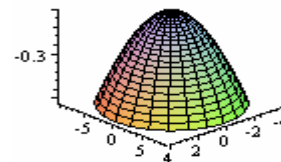
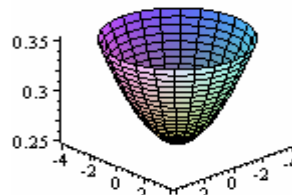
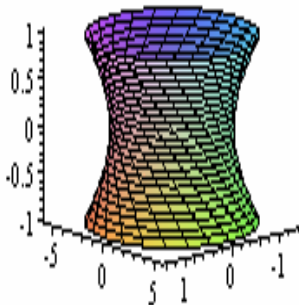
**Vecteur normal en M à [S] :**  $M'_u \wedge M'_v$

**Plan tangent en M à [S] =**  $\{P(X,Y,Z) : (\overrightarrow{M'_u} \wedge \overrightarrow{M'_v}) \cdot \overrightarrow{MP} = \det(\overrightarrow{M'_u}, \overrightarrow{M'_v}, \overrightarrow{MP}) = 0 \}$



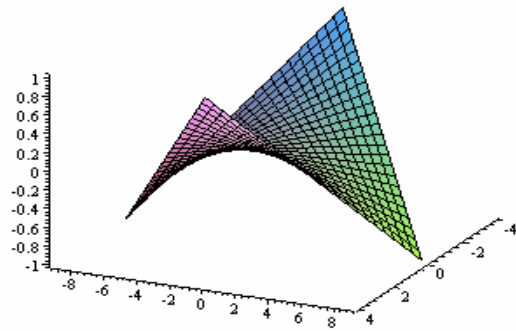
Paraboloïde de Révolution	Cône de Révolution	Ellipsoïde
$z = \frac{h}{R^2} (x^2 + y^2)$	$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
(pcost, psint, hp <sup>2</sup> /R <sup>2</sup> )	(pcost, psint, hp/R)	(a cosθ cosφ, b sinθ cosφ, c sinφ)

Ci dessus des équations cartésiennes et paramétriques de surfaces classiques (quadriques); ces dessins sont obtenus grace au logiciel MAPPLE. (la commande ci dessous fournit l'ellipsoïde)  
a:=2:b:=4:c:=1: plot3d([a\*cos(t)\*cos(p),b\*sin(t)\*cos(p),c\*sin(p)], t=0..2\*Pi,p=-Pi/2..Pi/2, orientation=[30,60], style=PATCH,axes=FRAME,font=[TIMES,ROMAN,8]);



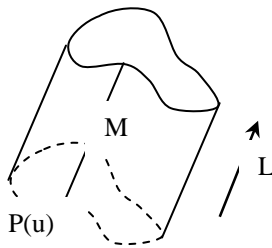
Hyperboloïde (1 nappe)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
(a(cost+vsint), b(sint-vcost), cv)

Hyperboloïde (2 nappes)
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

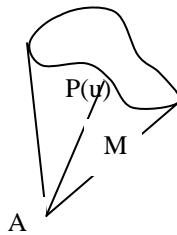


<b>Paraboloïde hyperbolique</b>
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
$(a(u+v)/2, b(u-v)/2, uv)$

**SURFACES REGLEES :  $M(u,v)=P(u)+v*\vec{L}(u)$**



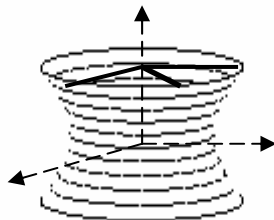
**CYLINDRES**  
 $M(u,v)=P(u)+vL$



**CONES**  
 $M(u,v)=v*P(u)+(1-v)A$

**DEVELOPPABLE**  
 Même plan tangent en tout point d'une droite génératrice  
 $M(u,v)=P(u)+vL(u)$   
 avec  
 $\det(P,L,L')=0 \quad \forall u$

**SURFACES de REVOLUTION (Axe Oz)**



$$P(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} \quad M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

# INTEGRALES de SURFACES

$S = \{M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3; (u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2\}$  est une nappe paramétrée régulière ( $M'_u, M'_v$  sont continues sur  $\Delta$  et  $M'_u \wedge M'_v \neq 0$ ).

## NOTIONS PRELIMINAIRES

### 1- Produit extérieur de 2 formes différentielles

**Définition**  $(P_1 dx + Q_1 dy) \wedge (P_2 dx + Q_2 dy) = (P_1 Q_2 - Q_1 P_2) dx dy$

**Propriétés**  $dx \wedge dx = 0$  ;  $dy \wedge dy = 0$  ;  $dy \wedge dx = -dx \wedge dy = dx dy$

Invariance par changement de variables

**2-Vecteur Élément de surface** 
$$d\sigma = \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix}$$

**Propriété** En tout point M ordinaire de la nappe S, le vecteur  $d\sigma$  vaut  $(M'_u \wedge M'_v) du dv$ ; ce vecteur est normal en M à [S].

**Exemple** : Sur la sphère  $S(O,R)$  de centre O de rayon R, en prenant  $u = \theta = \text{longitude}$ ,  $v = \varphi = \text{latitude}$ , on a  $d\sigma = R \cos \varphi \, OM \, d\theta \, d\varphi$

## AIRE d'une NAPPE S PARAMETREE

**Propriété** L'intégrale  $\iint_{(u,v) \in \Delta} |(M'_u \wedge M'_v) du dv|$  est indépendante du paramétrage (u,v) de la

nappe S régulière et représente son Aire; elle est notée  $A(S) = \int_{M \in S} |d\vec{\sigma}|$

**Exemple1** : Pour la demi sphère  $d\sigma = R \cos \varphi \, OM \, d\theta \, d\varphi$  ;  $A(S) = \iint_{\Delta} R^2 \cos \varphi \, d\theta \, d\varphi$

Avec  $\Delta = \{(\theta, \varphi) ; 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi/2\}$ ; après calculs,  $A(S) = 4\pi R^2$

**Exemple2** : Pour la surface  $z = f(x,y)$  ; posant  $u = x$  et  $v = y$ , on a :  $A(S) = \iint_{(x,y)} \sqrt{z'_x{}^2 + z'_y{}^2 + 1} \, dx dy$

Ainsi, l'aire latérale du cône  $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$  vaut après calculs  $A(S) = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$

## INTEGRALE de SURFACE

**Définition1** Si f est continue dans un domaine D contenant la surface S, l'intégrale

$\iint_{(u,v) \in \Delta} f(M) |(M'_u \wedge M'_v) du dv|$  est indépendante du paramétrage (u,v); on l'appelle intégrale de f

sur la surface S et on la note  $\int_{M \in S} f(M) |d\vec{\sigma}|$

**Exemple** Sur la demi sphère  $z > 0$ ,  $\int_{M \in S} z^2 |d\vec{\sigma}| = \iint_{\Delta} (R \sin \varphi)^2 R^2 \cos \varphi \, d\theta \, d\varphi = MR^2$ , avec  $M = 2\pi R^2$



S est dans la suite une surface paramétrée régulière, orientée par ses normales  $N = M'_u \wedge M'_v$

**Définition 2** Le flux  $\Phi$  du champ de vecteur  $V(x,y,z)$  continu dans un domaine D de  $R^3$  contenant S est l'intégrale  $\Phi = \int_{M \in S} \vec{V} d\vec{\sigma} = \iint_{(u,v) \in \Delta} \vec{V} (M'_u \wedge M'_v) du dv = \iint_{(u,v) \in \Delta} \det(V, M'_u, M'_v) du dv$

Rmq : on parle de flux sortant quand les normales sont orientées vers "l'extérieur de S", et de flux rentrant quand elles sont orientées vers "l'intérieur de S".

## THEOREMES d'ANALYSE VECTORIELLE

**Les Opérateurs Différentiels** : Pour la fonction f des 3 variables x,y,z; et  $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ , vecteur

fonction des 3 variables x,y,z on définit le vecteur Grad(f) gradient de f, "l'opérateur symbolique nabla"  $\nabla$ , le rotationnel de V et la divergence  $\text{div}(V)$  de V par les formules :

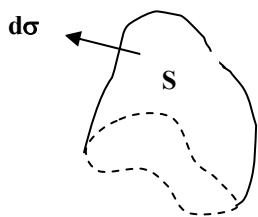
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{Grad}(f) = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f \quad \text{Rot}(V) = \begin{pmatrix} R'_y - Q'_z \\ P'_z - R'_x \\ Q'_x - P'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \wedge V \text{ (produit vectoriel)}$$

$$\text{Div}(V) = P'_x + Q'_y + R'_z = \nabla \cdot V \text{ (produit scalaire)}$$

### Quelques Propriétés

- \*  $\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) \cdot g + f \cdot \text{Grad}(g)$  \*  $\text{Div}(f \cdot V) = \text{Grad}(f) \cdot V + f \cdot \text{Div}(V)$  \*  $\text{Rot}(f \cdot V) = \text{Grad}(f) \wedge V + f \cdot \text{Rot}(V)$
- \*  $\text{Rot}(\text{Grad}(f)) = 0$  \*  $\text{Div}(\text{Rot}(V)) = 0$  \* V est un champ de gradient ssi  $\text{Rot}(V) = 0$

### Théorème de STOKES

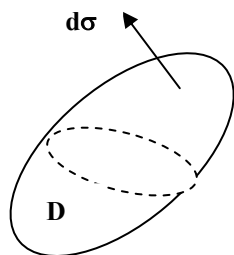


Soit  $S_+$  une surface orientée par  $d\sigma$ , s'appuyant sur une courbe fermée C parcourue dans le sens positif (pour  $d\sigma$ ).

Pour tout champ V de classe  $C_1$  dans un domaine

contenant S, on a 
$$\int_{C_+} \vec{V} d\vec{M} = \iint_{S_+} \text{rot}(V) d\vec{\sigma}$$

### Théorème d'OSTROGRADSKI



Soit D un domaine de  $R^3$  limité par une surface frontière  $S = \delta D_+$  orientée par  $d\sigma$ ; pour tout champ V de classe  $C_1$  dans D on a :

$$\iint_{\delta D_+} \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_D \text{div}(V) dx dy dz$$