CHANGEMENT de BASE

B_1 est une base de référence, B_2 une nouvelle base de l'espace vectoriel E.

MATRICE P de Passage de B_1 vers B_2

Définition: On appélle matrice de passage de B_1 vers B_2 la matrice P dont les p colonnes sont les coordonnées des p vecteurs de B_2 dans B_1.

Remarque: la matrice de passage Q de B_2 vers B_1 vérifie:

$Q = P^{-1}$ PQ=QP=Id (matrice Identité)

PROPRIETES : $[V]_B$ est la matrice des coordonnées de V sur la base B
$[a]_B$ est la matrice représentant l'opérateur a dans la base B

$$[V]_{B_1} = P\,[V]_{B_2} \quad ; \quad [V]_{B_2} = Q\,[V]_{B_1}$$
$$[a]_{B_1} = P\,[a]_{B_2} Q \quad ; \quad [a]_{B_2} = Q\,[V]_{B_1} P$$

EXEMPLE Pour $E=R^2$, $B_1=\{e_1,e_2\}$,$B_2=\{f_1,f_2\}$ avec $f_1=2e_1-e_2$; $f_2=e_1+2e_2$;

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Q} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

1/ Pour $V = 3e_1+e_2$ $\quad \mathbf{[V]_{B_1}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{[V]_{B_2}} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

On a $V = 1f_1+1e_2$

2/ Pour $\mathbf{[a]_{B_1}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \; ; \; \mathbf{[a]_{B_2}} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

DETERMINANTS D'ORDRE n

INTRODUCTION

L'objet de ce chapître est d'étendre la notion de détérminant connue pour n=2 (ou n=3); pour 2 vecteurs donnés V_1 et V_2 de R^2 de coordonnées dans une base $B=\{e_1,e_2\}$ de référence : $[V_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}$ et $[V_2]_B = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$, on a défini :

$$\det_B(V_1,V_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Cette notion a été également définie pour une matrice carrée A d'ordre 2 (de 2 lignes et 2 colonnes) représentant unopérateur f de R^2 dans la base B:

$\det(f)=\det_B A = \det_B(V_1,V_2)$ avec $V_1=f(e_1)$ et $V_2=f(e_2)$.

I - DEFINITION

1- Forme multilinéaire altérnée de $E=R^n$:

Une application $D : E^n \text{ --------->} R$
$(V_1,V_2,..,V_n) \qquad D(V_1,V_2,..,V_n)$

est dite ***multilinéaire*** ssi pour tous V_k.de E et λ de R, on a :

$$D(V_1,..,V_i+\lambda V'_i,..,V_n)=D(V_1,..,V_i,..,V_n) + \lambda\, D(V_1,..,V'_i,..,V_n)$$

(elle est linéaire par rapport à chaque vecteur V_i de E).

est dite ***altérnée*** ssi pour tous V_k de E, on a :

$$D(V_1,..,V_i,..,V_j,..,V_n)= - D(V_1,..,V_j,..,V_i,..,V_n)$$

(elle change de signe quand on transpose 2 vecteurs quelconques V_i et V_j.

2- Définition 1: Le détérminant de n vecteurs $\{V_1,V_2,..,V_n\}$ relativement à la base de référence $B=\{e_1,e_2,..,e_n\}$ de $E=R^n$ est la **forme multilinéaire altérnée D** telle que $\mathbf{D(e_1,e_2,..,e_n)=1}$; on la note :

$$\mathrm{Det}_B(V_1,V_2,..,V_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \quad [V_j]_B = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Remarque: la dimension n de E est égale au nombre de vecteurs V_i ; la valeur absolue de $\mathrm{Det}_B(V_1,..,V_n)$ est pour n=2 l'aire du parallélogramme d'arêtes V_1,V_2 ; pour n=3 le volume du tétraèdre d'arêtes V_1,V_2,V_3 etc...

3- Définition 2: Le détérminant d'une matrice carrée A d'ordre n est le déterminant de ses vecteurs colonnes.

4- Définition 3: Le détérminant d'un opérateur f de E est le nombre $\det_B(f(e_1),f(e_2),..,f(e_n))$ pour une base de référence $B=\{e_1,e_2,..,e_n\}$ de $E=R^n$. (On montrera plus loin que cette valeur est indépendante de la base B choisie pour la calculer).

II - PROPRIETES des DETERMINANTS

P1 : $\mathrm{Det}_B(V,V,V_3..,V_n)=0$ ***P2*** : $\mathrm{Det}_B(V_1+\sum_{j\neq 1} V_j,V_2,..,V_n)=\mathrm{Det}_B(V_1,V_2,..,V_n)$

P3 : $\{V_1,V_2,..,V_n\}$ lié $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}_B(V_1,V_2,..,V_n)=0$

P4 : Si A et B sont 2 matrices $l\times c$ et $c\times l$ **det(AB)=det(BA)**.

P5 : $\det_B(f(e_1),f(e_2),..,f(e_n))$ a la même valeur pour toute base $B=\{e_1,e_2,..,e_n\}$ de $E=R^n$. (On notera cette valeur det(f))

P6 : $\det(\lambda f)=\lambda^n\det(f)$ ***P7*** : $\det({}^t f)=\det(f)$

III - CALCUL des DETERMINANTS

Formule générale: Pour $n\geq 3$, le calcul repose sur le resultat suivant:

Propriété: soit M_{ij}, le déterminant ***mineur*** obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j du déterminant initial; $A_{ij}=(-1)^{i+j}\ M_{ij}$. le ***cofacteur*** de l'élément ij, on a : $\sum_k a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ \det A & \text{si } i\neq j\end{cases}$

Cette formule est à la base du développement d'un déterminant suivant une rangée (ligne ou colonne).

Exemple: Développement suivant la ligne 2 du déterminant:

$$\det(A)\ =(a_{21})[A_{21}]+(a_{22})[A_{22}]+(a_{23})[A_{23}]+(a_{24})[A_{24}]$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0&2\\3&-1&2&3\\4&0&2&0\\0&6&5&0\end{vmatrix}=(3)\left[(-1)\begin{vmatrix}0&0&2\\0&2&0\\6&5&0\end{vmatrix}\right]+(-1)\left[(1)\begin{vmatrix}1&0&2\\4&2&0\\0&5&0\end{vmatrix}\right]+(2)\left[(-1)\begin{vmatrix}1&0&2\\4&0&2\\0&6&0\end{vmatrix}\right]+(3)\left[(1)\begin{vmatrix}1&0&0\\4&0&2\\0&6&5\end{vmatrix}\right]$$

En pratique: On met en évidence avant développement des zéros (triangularisation grace à la propriété ***P2***) et on utilise la propriété des matrices triangulaires: leur déterminant est le produit des éléments diagonaux:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&//&//&//\\0&a_{22}&//&//\\0&0&.&//\\0&0&0&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}..a_{nn}$$