DIAGONALISATION d'un OPERATEUR a de E

B_1 est une base de référence, B_2 une nouvelle base de l'espace vectoriel E de dimension p.

I CHANGEMENT DE BASE: MATRICE P de Passage de B_1 vers B_2

Définition: La matrice de passage de B_1 vers B_2 est la matrice P, dont les p colonnes sont les coordonnées des p vecteurs de B_2 dans B_1.

Remarque: la matrice de passage Q de B_2 vers B_1 vérifie:

$Q = P^{-1}$ $\qquad$ PQ=QP=Id $\quad$ (matrice Identité)

Propriétés : $[V]_B$ est la matrice des coordonnées de V sur la base B
$[a]_B$ est la matrice représentant l'opérateur a dans la base B

$$[V]_{B_1} = P\,[V]_{B_2} \quad ; \quad [V]_{B_2} = Q\,[V]_{B_1}$$
$$[a]_{B_1} = P\,[a]_{B_2}Q \quad ; \quad [a]_{B_2} = Q\,[V]_{B_1}P$$

Exemple Pour $E=R^2$, $B_1=\{e_1,e_2\}$,$B_2=\{f_1,f_2\}$ avec $f_1=2e_1-e_2$; $f_2=e_1+2e_2$;

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1/ Pour $\mathbf{V = 3e_1+e_2}$ $\qquad [V]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad [V]_{B_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

On a $\mathbf{V = 1f_1+1e_2}$

2/ Pour $[a]_{B_1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; $[a]_{B_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

II ELEMENTS PROPRES d'un OPERATEUR a

Définition: Un réel λ est valeur propre de l'opérateur a ssi il existe un vecteur V non nul, tel que ***a(V)=λ.V (1)***. Le vecteur V, (détérminé à un coéfficient près), est appelé vecteur propre de a, associé à la valeur propre λ; la droite RV est une direction propre associée à λ.

Exemple: Dans le plan euclidien, l'opérateur a de symétrie par rapport à une droite Ru passant par l'origine (parallèlement à la droite Rv orthogonale à Ru) admet pour valeurs propres:
1 associée à la direction propre Ru
-1 associée à la direction propre Rv

Remarque: les droites du noyau Ker(a) de a (s'il ne se réduit pas au vecteur nul) sont des directions propres associées à $\lambda=0$.

Calcul des éléments propres de a:

Valeurs propres :(1) $\Leftrightarrow$ $(a-\lambda.Id)V=0$ $\Leftrightarrow$ $Q(\lambda)=\det(a-\lambda Id)=0$ (2)
Le polynôme Q de degré n=dimE est le ***polynôme caractéristique*** de a; l'équation (2) est l'***équation caractéristique*** de a; par exemple, les opérateurs représentés dans leur base de référence par les matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ont pour polynôme caractéristique $Q(\lambda)$:

$(3-\lambda)(1-\lambda)$ $\qquad (1-\lambda)^2$ $\qquad (9-\lambda)(1-\lambda)$ $\qquad$ et $(6-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$

Directions propres Pour chaque valeur propre λ de (2), on resoud le système (1) dont les solutions V sont déerminés à une constante multiplicative près L'exemple 1 conduit aux vecteurs propres $\mathbf{V}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ suivants:

$$\textbf{Pour } \lambda = 3 : \begin{pmatrix} 4-3 & 3 \\ -1 & 0-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_* \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Pour } \lambda = 1 : \begin{pmatrix} 4-1 & 3 \\ -1 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_* \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque: si λ est valeur propre de a l'ensemble des directions propres associées est formé des droites du sous espace propre $\mathrm{Ker}(a-\lambda.Id)$.

II OPERATEURS DIAGONALISABLES

Un opérateur a est "***diagonalisable***" ssi il existe une base de vecteurs propres.

1/ Soit A la matrice représentant dans une base B_1 un opérateur a diagonalisable, B_2 une base de vecteurs propres, alors on a $\mathbf{A=P\Lambda P^{-1}}$, avec P matrice de passage de B_1 vers B_2 et Λ matrice diagonale des valeurs propres de a.

2/ Un opérateur a ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

3/ Si la matrice A representant un opérateur a est symétrique, a est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres (pour laquelle $P^{-1}={}^tP$).