S Y S T E M E S d ' E Q U A T I O N S L I N E A I R E S

I - DIFFERENTES FORMES d'ECRITURE

Notations générales	Exemple
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ......+ a_{1p}x_p = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 ......+ a_{np}x_p = b_p \end{cases}$ **(S)** **Forme analytique** $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,..,n$ **Forme analytique abrégée**	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \quad - 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$
$\underset{n\times p}{A} . \underset{p\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{b}$ **Forme matricielle**	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\sum_{j=1}^{p} x_j A_j = b$ **Forme vectorielle**	$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>**Remarque**</u> Les vecteurs $A_1, A_2,..,A_p$ de R^n sont les colonnes de la matrice des coéfficients A

II - THEOREME GENERAL

(S) a des solutions ssi b appartient à l'espace ImA engendré par $\{A_1, A_2,.., A_p\}$

Si b $\in$ ImA et si $\{A_1, A_2,.., A_p\}$ ***est libre, il admet une solution et une seule***

Si b $\in$ ImA et si $\{A_1, A_2,.., A_p\}$ ***est lié, toute solution x s'écrit sous la forme $x=x_0 + z$ avec x_0 solution particulière et z vecteur du noyau de A (tel que Az=0)***

III - SYSTEME de CRAMER

<u>3.1 Définition</u> ***(S)*** est un système de **CRAMER** ssi

1/ n=p (La matrice des coéfficients A est carrée)

2/ detA $\neq$ 0 (le système $\{A_1, A_2,.., A_p\}$ est libre)

<u>3.2 Théorème</u> Un système de **CRAMER** admet une solution et une seule fournie par :

$$x_j = \frac{\det(A_1, A_2,..., A_{j-1}, b, A_{j+1},..., A_p)}{\det(A_1, A_2,..., A_{j-1}, A_j, A_{j+1},..., A_p)}$$

<u>3.3 Exemple</u>

Pour $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$ On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ **detA=-3**

$$x_1 = \frac{\det(b, A_2, A_3, A_4)}{\det A} = \frac{-3}{-3} = 1;\ x_2 = \frac{\det(A_1, b, A_3, A_4)}{\det A} = \frac{3}{-3} = -1;\ x_3 = \frac{-6}{-3} = 2 \quad ; x_4 = \frac{0}{-3} = 0$$

Remarque : Il est souvent plus simple de resoudre directement le système ...

3.4 Application : Matrice inverse A^{-1} d'une matrice carrée A d'ordre n

Définition Une matrice carrée A est inversible ssi l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(1) $\det A \neq 0$ (2) les colonnes de A sont libres (3) les lignes de A sont libres

(4) $\exists X$ carrée telle que AX=Id (matrice identité d'ordre n) (5) $\exists Y$ carrée telle que YA=Id

La matrice X ou Y est la matrice inverse de A ; elle est notée A^{-1}

Propriétés

[P1] Cof(A) étant la matrice des cofacteurs des éléments de A, on a $\mathbf{A.{}^t Cof(A) = \det(A)\ Id}$

[P2] Si A,B sont inversibles, ${}^tA$ et AB sont inversibles et on a : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Calcul de A^{-1} ***Méthode 1*** : on a. $A^{-1} = \dfrac{{}^t\mathrm{Cof(A)}}{\det A}$

Exemple 1 Si $ad-bc \neq 0$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exemple 2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ detA= 1 ; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : On résoud le système $Av = V$ équivalent à $A^{-1}V = v$

Exemple 2 on résoud $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ on obtient $\begin{cases} z = X \\ x = Y \\ y = Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = x \\ Z = y \\ X = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

IV - SYSTEMES RECTANGULAIRES

Les notations sont celles de du paragraphe **I**

4.1 Exemple 4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = m \end{cases} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

4.2 Sous système principal

Définition 1 On appelle

rang du système de vecteurs $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ le nombre maximum de vecteurs d'un sous système libre

rang d'une matrice A le rang du système de ses vecteurs colonnes $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$

rang du système d'équation (S) le rang de la matrice A de ses coéfficients

Pour l'exemple, on a $A_3 = -A_1$ et rang(S) =2

Théorème 1 Le rang d'une matrice A est l'ordre maximum d'un sousdéterminant non nul.

Définition 2   (Eléments principaux d'un système)

Soit un système dr rang r,
Toute **sous matrice carrée** Ar de A d'ordre r **de déterminant non nul** est dite **principale**
Le **soussystème** (de Cramer) de matrice de coéfficients Ar est dit **principal** (les colonnes de Ar sont les **vecteurs principaux**; ses lignes correspondent aux **équations principales**)

Dans l'exemple 4, toutes les matrices carrées d'ordre 3 ont un déterminant nul ;si on considère la sous matrice formée des 2 premières lignes et des 2 premières colonnes $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A_2=2\neq 0$ c'est une matrice principale à laquelle sont associés:

le soussystème principal $\begin{cases} x_1+x_2 = 3+x_3 \\ -x_1+x_2 = 1-x_3 \end{cases}$ et les vecteurs principaux $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

les équations principales qui caractérisent ce système de Cramer
les inconnues principales $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$;   l'inconnue non principale $\mathbf{x_3}$
les équations principales (les équations de ce système)
les équations non principales (les équations 3 et 4 du système **(S)** initial)

Remarque   Il existe en général plusieurs systèmes principaux

4.3 Résolution du système **(S)**   Elle s'effectue en 3 étapes

1ère   étape   ***Recherche d'un système principal)***
2ième étape   ***Résolution du système principal (de Cramer)***
3ième étape   ***Vérification de la compatibilité des équations non principales***

Dans l'exemple, le sous système principal $\begin{cases} x_1+x_2 = 3+x_3 \\ -x_1+x_2 = 1-x_3 \end{cases}$ de Cramer admet pour solution $\begin{cases} x_1 = 1+x_3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

Reportant ces valeurs dans les équations non principales $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = m \end{cases}$, on obtient

$\begin{cases} 2(1+x_3) - 2 - 2x_3 = 0 \\ 3(1+x_3) + 2 * 2 - 3x_3 = m \end{cases}$ qui sont compatibles ssi m=7. On déduit :

Si $m\neq 7$ (S) est un système incompatible de rang 2 (il n'admet pas de solution)

Si m=7 (S) de rang 2, admet les solutions $\begin{cases} x_1 = 1+x_3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 \text{ arbitraire} \end{cases}$; c'est un sytème à un degré de liberté

***4.4 Théorème de compatibilité*)** Le sytème (S) de rang r de vecteurs principaux $\{P_1,P_2,...,P_r\}$ admet des solutions ssi le système $\{P_1,P_2,...,P_r, b\}$ est lié

Ainsi, le système (S) est compatible ssi les colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ sont liées.

c'est à dire ssi $b=A_1+2A_2$; ce qui conduit à m=7

V - SYSTEMES HOMOGENES

5.1 Définition **(*S*)** est un système **HOMOGENE** ssi **b=0**

Conséquence : un système homogène admet toujours (au moins) la **solution x=0** (dite banale !)

5.2 Exemple de système homogène rectangulaire

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une sous matrice principale (de déterminant non nul d'ordre maximum extraite de A) est formée des 2 premières lignes et des 2 premières colonnes, et conduit au soussystème principal :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 \\ x_1 + x_2 = 4x_3 \end{cases}$$ soit **Py=d** avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ **inconnu** $d = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} x_3$

On obtient : $y = P^{-1}d = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} x_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} x_3 \\ \frac{7}{3} x_3 \end{pmatrix}$ On obtient : $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} x_3 \\ x_2 = \frac{7}{3} x_3 \\ x_3 \text{ arbitraire} \end{cases}$

5.3 Système carré homogène

Théorème un système carré (n équations n inconnues) admet d'autres solutions que la solution banale x=0 ssi detA=0

Exemple

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\det A = (\lambda+3)(\lambda-1)^3$

On obtient les resultats suivants:

- Si $\lambda \neq -3$ et $\lambda \neq 1$, le système carré de déterminant non nul est de Cramer; il admet la seule solution x=0

- Si $\lambda = -3$, le système (S) est de rang 3 à 1 dégré de liberté; il admet pour solutions $\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 \text{ arbitraire} \end{cases}$

- Si $\lambda = 1$, le système (S) est de rang 1 à 3 dégrés de liberté; il admet pour solutions $\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \text{ arbitraire} \\ x_3 \text{ arbitraire} \\ x_4 \text{ arbitraire} \end{cases}$