INTÉGRALES CURVILIGNES

Fonctions différentielles

la fonction différentielle de f en $(x,y) \in D \subset I\!R^2$ s'écrit:

$$\boxed{\boldsymbol{df} = f'_x(x,y)\ dx\ +\ f'_y(x,y)\ dy}$$

avec f fonction définie et continue admettant des dérivées partielles premiéres continues sur D

Formes différentielles

la forme différentielle de degré 1 est définie sur le domaine $D \subset I\!R^2$ par

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = P(x,y)\ dx\ +\ Q(x,y)\ dy}$$

P et Q étant des fonctions définies et continues sur D

cas important de l'égalité : $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{df} \iff \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$

$(P,Q) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$ ω est une fonction différentielle ou différentielle totale

Intégrale curviligne

Soit AB l'arc de courbe différentiable situé sur le domaine D, paramétré par :

$t \in [\,a,b\,] \longrightarrow (\ x(t)\ ,\ y(t)\ )$

l'**intégrale curviligne** de la forme différentielle $\boldsymbol{\omega}$ le long de l'arc AB est définie par:

$$\boxed{\int_{AB} \omega\ =\ \int_{AB} P(x,y)\ dx\ +\ Q(x,y)\ dy\ =\ \int_a^b [\ P(x(t),y(t))\ x'(t)\ +\ Q(x(t),y(t))\ y'(t)\ ]\ dt}$$

remarque : AB est appelé chemin d'intégration

interprétation: si $\overrightarrow{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ est un champ de vecteurs défini sur D

$\overrightarrow{dM} = (\ dx\ ,\ dy\ )$ un déplacement élémentaire

$$\boxed{\int_{AB} \omega\ =\ \int_{AB} \overrightarrow{V}(x,y) * \overrightarrow{dM}}$$

représente le travail ou circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ le long de l'arc AB

$\boxed{si\ \omega = df}$ alors $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$ et $\overrightarrow{V}$ dérive du potentiel [-f]

cas particulier: si l'arc AB est une courbe fermée C, $\omega = df \implies \oint_C \omega = 0$

Théorème de Green-Riemann

Soit D le domaine plan, de frontière la courbe fermée C, sans point double, continue, différentiable sauf en un nombre fini de points , orientée dans le sens direct
si P et Q admettent des dérivées partielles premières continues sur D

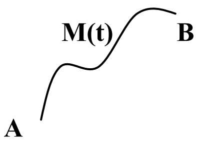
$$\boxed{\int_C P(x,y)\ dx\ +\ Q(x,y)\ dy\ =\ \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\ -\ \frac{\partial P}{\partial y}\right]\ dx\ dy}$$

application au calcul d'une aire plane:

$$\boxed{\text{Aire de } D = \iint_D dxdy = \int_C x\,dy = -\int_C y\,dx = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx \left(= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\ d\theta\ \text{ en coordonnées polaires}\right)}$$

LONGUEUR d'un ARC PARAMETRE AB={M(t)=(x(t),y(t),z(t)); $t\in[t_A,t_B]$

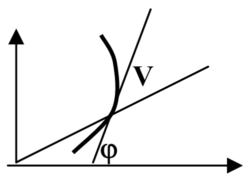
Dans l'espace R^3 : Abscisse curviligne de B sur l'arc d'origine A, orienté dans le sens des t croissants



$$AB = s(B) = \int_{AB} \left|\overrightarrow{dM}\right| = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$

$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$; $\frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ **est un vecteur unitaire porté par la tangente**

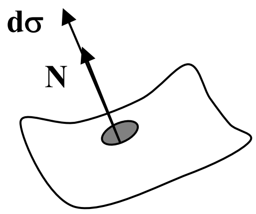
Dans le plan R^2 $\quad ds^2 = dx^2+dy^2= d\rho^2+\rho^2 d\theta^2 \qquad l(AB)=\int_{AB}\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{\theta_A}^{\theta_B}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$



$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}\ ;\ \sin\varphi = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos V = \frac{dx}{d\rho}\ ;\ \sin V = \frac{dy}{d\rho}$$

AIRE d'une NAPPE PARAMETREE S={M(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)); $(u,v)\in\Delta$}

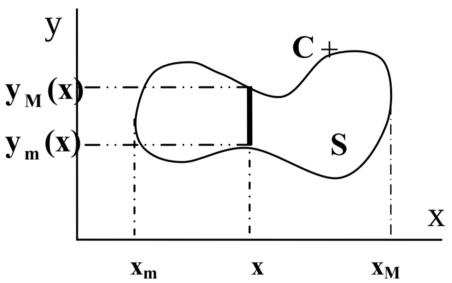


$N=M'_u \wedge M'_v$ est normal en M à S

$d\sigma=(dy\wedge dz,\ dz\wedge dx,\ dx\wedge dy)$ (=Ndudv au point M(u,v) de la surface)

$$Aire(S)=\int_{M\in S}\left|\overrightarrow{d\sigma}\right| = \iint_{(u,v)\in\Delta} |N\ dudv|$$

Nappe Plane: S limitée par le contour direct C_+

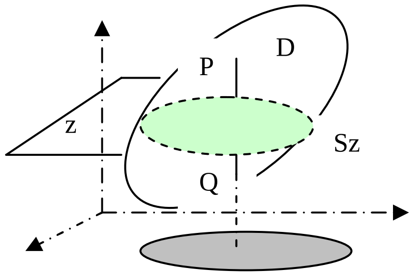


$$Aire(S) = \iint_S dxdy = \int_{x_m}^{x_M}[y_M(x) - y_m(x)]\ dx$$

$$= \iint_S \rho d\rho\, d\theta\, dz \text{ (en polaire)}$$

$$= \int_{C_+} xdy = -\int_{C_+} ydx = \int_{C_+}\frac{xdy - ydx}{2} = \int_{C_+}\frac{\rho^2 d\theta}{2}$$

VOLUME d'un DOMAINE D de R^3



$$Vol(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_D |\rho| d\rho d\theta dz = \iiint_D r^2 |\cos\varphi| dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{z_m}^{z_M} Aire(S_z)\ dz = \iint_{ProjD_{x0y}} [z_P(x,y) - z_Q(x,y)]dxdy$$