LA DROITE DANS LE PLAN

Rappels

On considère le plan rapporté au repère orthonormé direct $R(o, \vec{i}, \vec{j})$,

Soient $\overrightarrow{V}(a,b)$ et $\overrightarrow{V'}(a',b')$ deux vecteurs du plan

1. $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists \alpha \in I\!R \text{ tel que } \overrightarrow{V} = \alpha \overrightarrow{V'}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{ab' = a'b}$

2. $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{V} * \overrightarrow{V'} = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{aa' + bb' = 0}$

où $*$ est le produit scalaire

1^{re}présentation: équation cartésienne réduite de la droite

Soit M de coordonnées [x,y] le point courant de la droite

$$\boxed{y = mx + b}$$

droite de pente "m" et passant par le point B$[0, b]$

vecteur directeur : $\overrightarrow{V_D}(1, m)$; vecteur normal : $\overrightarrow{N_D}(m, -1)$

cas particulier : $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ droite passant par le point A$[x_0, y_0]$

cette écriture exclut les droites paralèlles au vecteur $\vec{j}(0,1)$

2^{me}présentation: équation cartésienne de la droite

cas général:

Soit M de coordonnées [x,y] le point courant de la droite

$$\boxed{ux + vy + w = 0} \quad \text{avec} \quad (u,v) \neq (0,0) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{vecteur normal} \quad \overrightarrow{N_D}(u,v) \\ \text{vecteur directeur} \quad \overrightarrow{V_D}(v,-u) \\ \text{pente} \qquad m = \dfrac{-u}{v} \end{array} \right.$$

$w = 0$ la droite passe passe par l'origine

$\left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ v \neq 0 \end{array} \right.$ la droite est paralèlle au vecteur $\vec{i}(1,0)$

$\left\{ \begin{array}{l} u \neq 0 \\ v = 0 \end{array} \right.$ la droite est paralèlle au vecteur $\vec{j}(0,1)$

si la droite passe par le point A$[x_0, y_0]$, est orthogonale à $\overrightarrow{N_D}(u,v)$

$\boxed{M[x,y] \in (D)}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{N_D} * \overrightarrow{AM} = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0}$

3^{me}présentation : équations paramétriques de la droite

Soient :

$\overrightarrow{V_D}(\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de (D) et A $[x_0, y_0]$ un point de (D),

$$\boxed{M[x,y] \in (D)} \Leftrightarrow \boxed{\exists t \in I\!R \ / \ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V_D}} \Leftrightarrow \boxed{\exists t \in I\!R \ \text{ et } \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}}$$

Eliminant le paramètre t entre ces deux équations on retrouve l'équation cartésienne de la droite (D) .

Distance d'un point à une droite

Soient :

la droite (D) $ux + vy + w = 0$ et $\overrightarrow{N_D}(u, v)$ un vecteur normal

les points $M[x,y] \in (D)$ et $B[x_1, y_1]$ quelconque dans le plan

la distance du point B à la droite (D) vaut:

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{BM} * \overrightarrow{N_D}|}{\|\overrightarrow{N_D}\|} = \frac{|ux_1 + vy_1 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}}$$

LA DROITE DANS L'ESPACE

$1^{ère}$ présentation: équations paramétriques de la droite

$\overrightarrow{V} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur directeur et $A[x_0, y_0, z_0]$ un point de la droite

$$\boxed{M[x,y,z] \in (D)} \Leftrightarrow \boxed{\exists t \in \mathbb{R} \;/\; \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V_D}} \Leftrightarrow \boxed{\exists t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}}$$

Cas particulier :

la droite passe par deux points fixes A et B , alors $\boxed{\overrightarrow{V_D} = \overrightarrow{AB}}$

$2^{ère}$ présentation: équations canoniques de la droite

$$\boxed{\begin{cases} x = az + p \\ y = cz + q \end{cases}}$$ avec a , b , p , q réels .

Distance d'un point à une droite

Soient :

$\overrightarrow{V_D}$ un vecteur directeur et M un point de (D)

la distance d'un point B à la droite (D) vaut: $\boxed{d = \dfrac{\|\overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{V_D}\|}{\|\overrightarrow{V_D}\|}}$

LE PLAN DANS L'ESPACE

Rappels

On considère l'espace rapporté au repère orthonormé direct $R(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

Soient $\overrightarrow{V} = (a, b, c)$ et $\overrightarrow{V'} = (a', b, c')$ deux vecteurs de l'espace

1. $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V'} = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} ab' = a'b \\ b'c = bc' \\ c'a = ca' \end{cases}}$

2. $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{V} * \overrightarrow{V'} = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$

équation cartésienne du plan

Soit M de coordonnées [x,y] le point courant de la droite

$$\boxed{ux + vy + wz + h = 0} \qquad \begin{cases} (u, v, w) \neq (0, 0, 0) \\ \overrightarrow{N_P}(u, v, w) \quad \text{vecteur normal au plan} \end{cases}$$

pour $h = 0$ le plan passe par l'origine.

si le plan passe par le point $A[x_0, y_0, z_0]$, est orthogonal à $\overrightarrow{N_P}(u, v, w)$

$$\boxed{M[x, y, z] \in (P)} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{N_P} * \overrightarrow{AM} = 0} \Leftrightarrow \boxed{u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0}$$

équations paramétriques du plan

Soit le plan (P) passant par le point $A[x_0, y_0, z_0]$ et paralèlle aux vecteurs $\overrightarrow{V_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\overrightarrow{V_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ avec $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} \neq 0$

alors $\boxed{M[x, y, z] \in (P)} \Leftrightarrow \boxed{\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{V_1} + t_2\overrightarrow{V_2}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x = x_0 + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 \\ y = y_0 + t_1\beta_1 + t_2\beta_2 \\ z = z_0 + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 \end{cases}}$$

Remarques:

éliminant t_1 et t_2 on obtient l'équation cartésienne du plan (P)

une autre possibilité est de calculer un vecteur normal au plan $\overrightarrow{N_P} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ et de se reporter au paragraphe précédent

si le plan est défini par trois points A,B,C , on construit, à partir de ces trois points, deux vecteurs $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{AC}$ parallèles au plan

$$\boxed{\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}}$$

cas particuliers importants

$x = a$ plan paralèlle aux vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ $(v = w = 0)$
$y = b$ plan paralèlle aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ $(u = w = 0)$
$z = c$ plan paralèlle aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ $(u = v = 0)$

si $u = 0$ le plan est paralèlle à $\vec{i}$
si $v = 0$ le plan est paralèlle à $\vec{j}$
si $w = 0$ le plan est paralèlle à $\vec{k}$

distance d'un point à un plan

Soient :

le plan (P) $ux + vy + wz + h = 0$ et $\overrightarrow{N_D}(u, v, w)$ un vecteur normal

les points $M[x, y, z] \in (P)$ et $B[x_1, y_1, z_1]$ quelconque dans l'espace

la distance du point B au plan (P) vaut :

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{BM} * \overrightarrow{N_D}|}{\|\overrightarrow{N_D}\|} = \frac{|ux_1 + vy_1 + wz_1 + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}}$$

LE CERCLE DANS LE PLAN

équation canonique

Soient un point fixe I de coordonnées $[a, b]$ et R un réel positif

$\boxed{M[x, y] \in (C)} \Leftrightarrow \boxed{\|I\vec{M}\|^2 = R^2} \Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$

I est le centre du cercle , R le rayon

inversement l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0$ représente un cercle

$\Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - p}$ avec $\boxed{a^2 + b^2 - p > 0}$

le cercle est centré en $[a, b]$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$

si $p = 0$ le cercle passe par l'origine.

équation de la tangente en un point

Soient :

le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0$, le point $M_0[x_0, y_0] \in (C)$

le point $T[X, Y]$ $\in$ tangente au cercle en M_0 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0T} * \overrightarrow{M_0I} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{(X - x_0)(a - x_0) + (Y - y_0)(b - y_0) = 0}$

$\Leftrightarrow \boxed{Xx_0 + Yy_0 - a(X + x_0) - b(Y + y_0) + p = 0}$ avec $\boxed{a^2 + b^2 - p > 0}$

équations paramétriques

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} x = a + R\ \cos t \\ y = b + R\ \sin t \\ t \in [0, 2\pi[\end{array}\right.}$$

paramétrage trigonométrique $t = (\vec{i}, \overrightarrow{IM})$

ou $$\boxed{\left\{\begin{array}{c} x = a + R\ \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = b + R\ \dfrac{2u}{1+u^2} \\ u \in [-\infty, +\infty[\end{array}\right.}$$

$(u = \tan \dfrac{t}{2})$ paramétrage rationnel

LA SPHÈRE DANS L'ESPACE

Soient un point fixe I[a,b,c] et R un réel positif

$\boxed{M[x, y, z] \in (S)} \Leftrightarrow \boxed{\|I\vec{M}\|^2 = R^2} \Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$

LES CONIQUES

équations réduites

ellipse: $$\boxed{\frac{(x-x_I)^2}{A^2}+\frac{(y-y_I)^2}{B^2}=1}$$

$I\ [x_I, y_I]$ est le centre de l'ellipse, A et B ses demi axes

hyperbole:

$$\boxed{\frac{(x-x_I)^2}{A^2}-\frac{(y-y_I)^2}{B^2}=1}\ \text{(i)} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\frac{-(x-x_I)^2}{A^2}+\frac{(y-y_I)^2}{B^2}=1}\ \text{(ii)}$$

$I\ [x_I, y_I]$ est le centre de l'hyperbole

les équations des asymptotes sont identiques dans les deux cas

$$\boxed{y-y_I=\frac{B}{A}(x-x_I)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y-y_I=-\frac{B}{A}(x-x_I)}$$

équations paramétriques

ellipse: $$\boxed{\left\{\begin{array}{c} x=x_I+A\ \cos t \\ y=y_I+B\ \sin t \\ t\in[0,2\pi[\end{array}\right.} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\left\{\begin{array}{c} x=x_I+A\ \dfrac{1+u^2}{1-u^2} \\ y=y_I+B\ \dfrac{2u}{1-u^2} \\ u\in]-1,1[\end{array}\right.} \quad (u=\mathrm{th}\frac{t}{2})$$

hyperbole: $$\boxed{\left\{\begin{array}{c} x=x_I\pm A\ \mathrm{cht} \\ y=y_I+B\ \mathrm{sht} \\ t\in]-\infty,+\infty[\end{array}\right.}\ \text{(i)} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\left\{\begin{array}{c} x=x_I+A\ \mathrm{sht} \\ y=y_I\pm B\ \mathrm{cht} \\ t\in]-\infty,+\infty[\end{array}\right.}\ \text{(ii)}$$

RM: le $\pm$ permet de paramétrer les deux branches de l'hyperbole.

Sur les figures ci-dessus le point I est confondu avec le point O.