

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — *Les familles stables de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 admettant quatre fibres singulières.* Note (*) de **Arnaud Beauville**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Une famille stable de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 admet au moins quatre fibres singulières. On donne une liste complète de celles de ces familles qui ont exactement quatre fibres singulières.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — The Stable Families of Elliptic Curves on \mathbf{P}^1 with Four Singular Fibres.

A stable family of elliptic curves on \mathbf{P}^1 has at least four singular fibres. We give a complete list of those families which have exactly four singular fibres.

Une famille stable de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 est un morphisme plat $g : Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ dont les fibres sont des courbes intègres de genre 1, admettant au plus un point double ordinaire. Si elle n'est pas triviale, une telle famille admet au moins quatre fibres singulières [1]. Le but de cette Note est de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de ces familles admettant quatre fibres singulières, et de les décrire explicitement.

En résolvant les singularités de Y , on obtient une *fibration semi-stable* $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, où X est une surface lisse et où les fibres singulières de f sont du type I_c (polygone à c côtés formé de courbes rationnelles). Il revient au même de classer les familles stables ou les familles semi-stables.

Un exemple de fibration semi-stable est fourni par certaines *familles modulaires*. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, possédant la propriété suivante :

(SS) Γ ne contient aucun élément de trace $-2, -1, 0$ ou 1 .

Alors Γ opère librement sur le demi-plan de Poincaré \mathbf{H} ; le produit semi-direct de Γ par \mathbf{Z}^2 opère librement et proprement sur $\mathbf{H} \times \mathbf{C}$ par la formule :

$$(\gamma, p, q) \cdot (\tau, z) = (\gamma\tau, (c\tau + d)^{-1}(z + p\tau + q))$$

pour :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad (p, q) \in \mathbf{Z}^2, \quad \tau \in \mathbf{H}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Notons X_Γ^0 la surface quotient, et B_Γ^0 la courbe \mathbf{H}/Γ . D'après [2], la fibration elliptique lisse $X_\Gamma^0 \rightarrow B_\Gamma^0$ se prolonge de manière unique en une fibration semi-stable $X_\Gamma \rightarrow B_\Gamma$: c'est la *famille modulaire* associée à Γ .

Nous considérerons les sous-groupes suivants de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$:

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid b \equiv c \equiv 0, a \equiv 1 \pmod{n} \right\},$$

$$\Gamma_0^0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0, a \equiv 1 \pmod{n} \right\},$$

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

Considérons d'autre part un pinceau de cubiques dans \mathbf{P}^2 , tel que les seules singularités des courbes du pinceau soient des points doubles ordinaires. Après éclatement des neuf

points-base du pinceau (qui peuvent être infiniment voisins), on obtient une famille semi-stable de courbes elliptiques sur \mathbf{P}^1 , dite famille déduite du pinceau de cubiques.

THÉORÈME. — Soit $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ une famille semi-stable de courbes elliptiques admettant quatre fibres singulières. Alors f est isomorphe à la famille modulaire associée à l'un des six sous-groupes Γ ci-dessous; celle-ci s'identifie à la famille déduite du pinceau de cubiques correspondant à Γ dans la liste suivante :

TABLEAU

Γ	Équation du pinceau	Nombre de composantes des fibres singulières
$\Gamma(3)$	$X^3 + Y^3 + Z^3 + tXYZ = 0$	3, 3, 3, 3
$\Gamma_0^0(4) \cap \Gamma(2)$	$X(X^2 + Z^2 + 2ZY) + tZ(X^2 - Y^2) = 0$	4, 4, 2, 2
$\Gamma_0^0(5)$	$X(X - Z)(Y - Z) + tZY(X - Y) = 0$	5, 5, 1, 1
$\Gamma_0^0(6)$	$(X + Y)(Y + Z)(Z + X) + tXYZ = 0$	6, 3, 2, 1
$\Gamma_0(8) \cap \Gamma_0^0(4)$	$(X + Y)(XY - Z^2) + tXYZ = 0$	8, 2, 1, 1
$\Gamma_0(9) \cap \Gamma_0^0(3)$	$X^2Y + Y^2Z + Z^2X + tXYZ = 0$	9, 1, 1, 1

(On donne à la fin de cette Note une description géométrique des pinceaux de cubiques considérés.)

Démonstration. — Notons B la base de la fibration f , B^0 le plus grand ouvert de B au-dessus duquel f est lisse, et \tilde{B}^0 le revêtement universel de B^0 . En choisissant une trivialisat on de $R^1f_*(\mathbf{Z})$ au-dessus de \tilde{B}^0 , on définit une application classifiante $\tau: \tilde{B}^0 \rightarrow H$. Il résulte de [1] que l'orthogonal d'une fibre dans $H^2(X, \mathbf{Q})$ est engendré par les classes des composantes des fibres singulières; d'après [3], prop. 3.20, ceci entra ene que τ est un isomorphisme. On en déduit que la famille $X \rightarrow B$ est isomorphe à une famille modulaire $X_\Gamma \rightarrow B_\Gamma$, où Γ est un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifiant (SS). L'application modulaire $j: B \rightarrow \mathbf{P}^1$ possède les propriétes de ramifications suivantes :

- j est étale au-dessus de $\mathbf{P}^1 - \{0, 12^3, \infty\}$;
- l'indice de ramification de j est 2 (resp. 3) en tout point de $j^{-1}(0)$ [resp. $j^{-1}(12^3)$].

La formule de Riemann-Hurwitz permet alors de calculer le degré n de j :

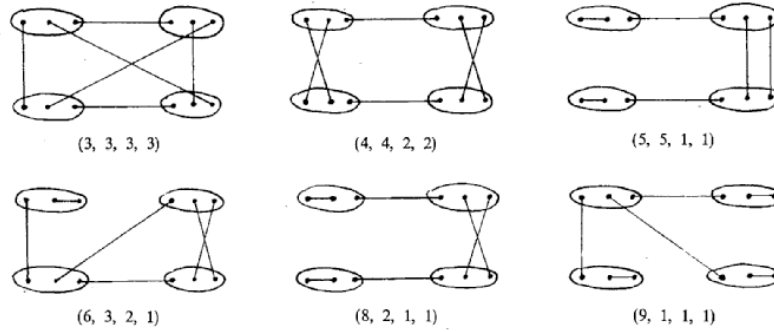
$$-2 = -2n + \frac{n}{2} + \frac{2n}{3} + n - 4, \quad \text{d'où } n = 12.$$

Ainsi l'indice de Γ dans $SL_2(\mathbf{Z})$ est 24; l'image Γ' de Γ dans $PSL_2(\mathbf{Z})$ est d'indice 12. Remarquons qu'étant donn e $\Gamma' \subset PSL_2(\mathbf{Z})$, il existe au plus un relèvement Γ de Γ' dans $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifiant (SS). Nous allons déterminer à conjugaison près, les sous-groupes Γ' de $PSL_2(\mathbf{Z})$.

Notons Π le groupe fondamental de $\mathbf{P}^1 - \{0, 12^3, \infty\}$; il est engendré par trois lacets s, r, t , autour de 0, 12^3 et ∞ respectivement, soumis à la relation $srt = 1$. Le revêtement $j: B \rightarrow \mathbf{P}^1$ correspond à un homomorphisme $\varphi: \Pi \rightarrow \mathfrak{S}_{12}$, pour lequel $\varphi(s)$ est de type $(2, \dots, 2)$, $\varphi(r)$ de type $(3, \dots, 3)$ et $\varphi(t)$ de type (c_1, \dots, c_4) [on dit qu'une permutation est de type (c_1, \dots, c_r) si elle est égale au produit de r cycles disjoints de longueurs c_1, \dots, c_r]; de plus le sous-groupe $\varphi(\Pi)$ de \mathfrak{S}_{12} est transitif. Le quotient de Π par la relation $s^2 = r^3 = 1$ s'identifie à $PSL_2(\mathbf{Z})$, de sorte que φ se factorise à travers $\psi: PSL_2(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathfrak{S}_{12}$; le sous-groupe Γ' est l'image réciproque par ψ du fixateur d'un point.

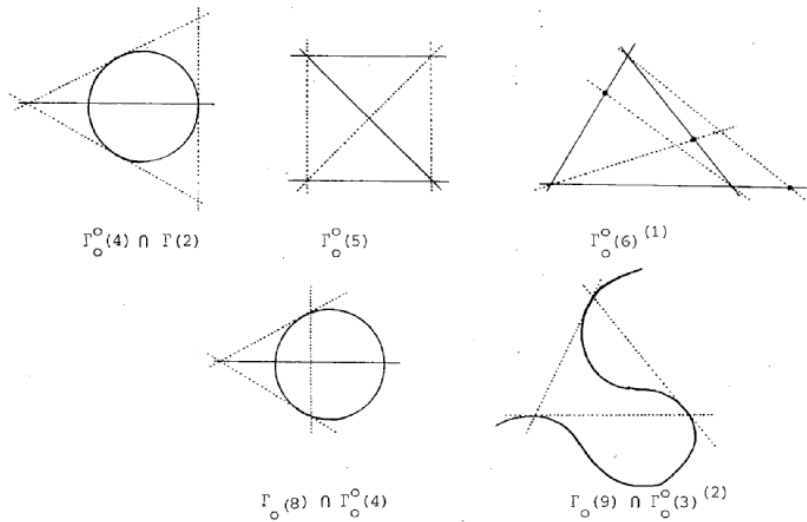
Il s'agit donc de classifier, à conjugaison près, les paires d'éléments (σ, ρ) de \mathfrak{S}_{12} telles que σ soit de type $(2, \dots, 2)$, ρ de type $(3, \dots, 3)$ et $\sigma\rho$ de type (c_1, \dots, c_4) . On associe à une telle paire un diagramme dont les points sont les entiers de 1 à 12; on note les orbites de σ par un trait : $\bullet \xrightarrow{a} \bullet$ et celles de ρ par un ovale : $\bullet \xrightarrow{\rho a} \bullet$.

Un argument combinatoire facile montre que les diagrammes possibles sont les suivants (on indique sous le diagramme le type de $\sigma\rho$) :



Il y a donc au plus six sous-groupes de $SL_2(\mathbb{Z})$ (à conjugaison près) possédant les propriétés requises. Or on vérifie facilement que les six sous-groupes décrits dans le théorème conviennent. Dans chaque cas, l'étude des pointes permet de déterminer le type de $\sigma\rho$, c'est-à-dire le nombre de composantes des fibres singulières (cf. [2]).

On a montré dans [1] que le genre géométrique $g_g(X)$ est nul. Pour une surface elliptique sans fibres multiples, ceci entraîne que la surface est rationnelle, et plus précisément que la fibration elliptique est déduite d'un pinceau de cubiques dans \mathbb{P}^2 . Pour démontrer la



dernière partie du théorème, il suffit de décrire, pour chaque quadruplet (c_1, \dots, c_4) de la liste, un pinceau de cubiques admettant (après éclatement des points-base) quatre fibres de type I_{c_1}, \dots, I_{c_4} : il résulte en effet du calcul de [1], § 4, A qu'un tel pinceau n'a pas d'autres fibres singulières. Le pinceau associé à $\Gamma(3)$ est bien connu : il est engendré par une cubique lisse C et un triangle contenant les neuf points d'inflexion de C . On décrit ci-dessus cinq autres pinceaux de cubiques, en schématisant une cubique du pinceau en traits pleins et une autre en pointillés; il est facile de vérifier que ces pinceaux conviennent.

(¹) Les trois points marqués sur la figure sont alignés.

(²) Cette configuration m'a été signalée par R. Miranda.

(*) Remise le 24 mai 1982.

[1] A. BEAUVILLE, *Astérisque*, n° 86, 1981, p. 97-108.

[2] K. KODAIRA, *Annals of Math.*, 77, 1963, p. 563-626.

[3] D. COX et S. ZUCKER, *Inventiones Math.*, 53, 1979, p. 1-44.

Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.