SUR LE NOMBRE MAXIMUM DE POINTS DOUBLES D'UNE SURFACE DANS $\mathbf{P}^3$ $(\mu(5) = 31)$

Arnaud Beauville

1. Historique du problème

On note classiquement $\mu(n)$ le nombre maximum de points doubles possible pour une surface de degré n dans $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$, n'ayant que des points doubles ordinaires. On a évidemment $\mu(1) = 0$, $\mu(2) = 1$.

On obtient $\mu(3)$ et $\mu(4)$ en considérant le degré c de la surface duale; pour une surface de degré n dans $\mathbf{P}^3$, avec comme seules singularités μ points doubles ordinaires, il est donné par la formule $c = n(n-1)^2 - 2\mu$. En exprimant que c est supérieur à 3, on trouve $\mu \leq 4$ pour une cubique, $\mu \leq 16$ pour une quartique. On a en fait $\mu(3) = 4$: toute cubique à 4 points doubles ordinaires est projectivement isomorphe à la cubique de Cayley $\Sigma_{i=0}^3 1/X_i = 0$. On a $\mu(4) = 16$ (Kummer, 1864), l'égalité étant atteinte pour la surface de Kummer.

Le problème devient très difficile dès le degré 5; de fait le résultat principal de cet exposé $(\mu(5) = 31)$ est à ma connaissance nouveau. La question a fait cependant l'objet de nombreux travaux, qu'on va essayer de résumer ici.

En utilisant comme précédemment le degré de la surface duale, on obtient facilement la majoration $\mu(n) \leq \frac{1}{2}n^2(n-2)$. Une meilleure inégalité—en fait, la meilleure connue jusqu'à présent pour n grand—a été obtenue en 1906 par A. Basset [1]. En projetant la surface depuis un point générique de $\mathbf{P}^3$, il obtient un morphisme fini de la surface sur $\mathbf{P}^2$, dont le lieu de ramification Δ a le même nombre de points doubles et la même classe que la surface. On peut alors appliquer les formules de Plücker à la courbe Δ; en exprimant que le nombre de bitangentes à Δ est positif, on trouve pour $n \geq 5$ l'inégalité

$$\mu(n) \leq \tfrac{1}{2}[n(n-1)^2 - 5 - \sqrt{n(n-1)(3n-14)+25}]$$

par exemple: $\mu(5) \leq 34$, $\mu(6) \leq 66$, $\mu(7) \leq 114\ldots$

En 1946, Severi propose la majoration $\mu(n) \leq \binom{n+2}{3} - 4$ [8], bien meilleure que celle de Basset: la borne de Severi est asymptotiquement en $n^3/6$, alors que celle de Basset est en $n^3/2$. Mais Severi base sa démonstration sur un postulat qu'il considère comme intuitivement évident (tout en reconnaissant qu'il n'en a pas de démonstration rigoureuse): l'acquisition de μ points doubles ordinaires diminue d'au moins μ le nombre de modules de la surface. On sait aujourd'hui qu'il faut être prudent avec ce genre d'arguments; un an plus tard, B. Segre donne des contre-exemples à la majoration de Severi [7]. L'erreur de Severi a été analysée récemment par Burns et Wahl: les surfaces qui ne vérifient pas la majoration de Severi donnent des exemples très simples de surfaces "obstruées" au sens de la théorie des déformations [3].

Indiquons l'exemple le plus simple de Segre, pour n pair. Soient P une forme de degré $n/2$ et $L_1, \dots, L_n$ des formes linéaires en $X_0, \dots, X_3$; considérons la surface d'équation $P^2 + \Pi_{i=1}^n L_i = 0$. Il est clair qu'elle est singulière aux $\frac{1}{4}n^2(n-1)$ points d'équations $P = L_i = L_j = 0$ $(1 \leq i < j \leq n)$; un argument du type Bertini montre qu'elle n'a pas d'autres singularités pour un choix générique de P et des L_i, et que ces points sont des points doubles ordinaires. On a donc $\mu(n) \geq \frac{1}{4}n^2(n-1)$ pour n pair.

De meilleures minorations ont été obtenues pour des petites valeurs de n: $\mu(5) \geq 31$, $\mu(6) \geq 63$[1], ... Nous allons expliquer ici la construction, due à Togliatti [10], d'une quintique avec 31 points doubles.

Partons d'une hypersurface cubique V lisse dans $\mathbf{P}^5$ et d'une droite l contenue dans V. Soit V_l la variété obtenue par éclatement de l dans V; la projection de sommet l définit un morphisme $f: V_l \to \mathbf{P}^3$. La fibre générique de f est une conique lisse; le lieu des points t de $\mathbf{P}^3$ tels que la fibre $f^{-1}(t)$ soit singulière est une quintique $\Sigma \subset \mathbf{P}^3$. Cette surface admet 16 points doubles ordinaires, qui sont les points où la fibre est une droite double.

Aux points lisses de Σ, la fibre de f est réunion de deux droites distinctes; remarquons incidemment que l'ensemble de ces droites (i.e. l'ensemble des droites contenues dans V et incidentes à l) est une surface lisse X, munie d'un revêtement double $X \to \Sigma$ ramifié uniquement aux 16 points doubles de Σ.

Supposons maintenant que la cubique V acquière des points doubles ordinaires; on vérifie sans peine que pour un choix générique de la droite l, ces points doubles correspondent par projection à de nouveaux points doubles de Σ. Or Togliatti a montré que le nombre maximum de points doubles possible pour une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^5$ est 15 [9]. En appliquant la construction précédente à une cubique dans $\mathbf{P}^5$ avec 15 points doubles ordinaires, on obtient la surface de Togliatti: c'est une surface de degré 5 ayant comme seules singularités 31 points doubles ordinaires.

On a donc $\mu(5) \geq 31$; le reste de l'exposé est consacré à la démonstration de l'égalité $\mu(5) = 31$.

[1] E. Catanese et G. Ceresa ont construit récemment une sextique avec 64 points doubles (Constructing surfaces with a given number of nodes, à paraître au Journal of pure and applied Algebra).

2. $\mu(5) = 31$

Soit Σ une surface de degré 5 dans $\mathbf{P}^3$, ayant pour seules singularités μ points doubles ordinaires $s_1, \dots, s_\mu$. Notons S la surface obtenue en éclatant $s_1, \dots, s_\mu$; pour $1 \leq i \leq \mu$, soit E_i la courbe exceptionnelle correspondant à s_i. On a

$$E_i^2 = -2 \qquad E_i.E_j = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

La surface S est difféomorphe à une quintique lisse dans $\mathbf{P}^3$, et vérifie en particulier

$$K_S^2 = 5 \qquad \chi(\mathcal{O}_S) = 5 \qquad b_2(S) = 53.$$

L'idée de la démonstration consiste à regarder les classes des E_i dans $H^2(S, \mathbf{Z}/2)$; elles engendrent un sous-espace totalement isotrope pour la forme d'intersection, donc de dimension ≤ 26. Toutefois les classes des E_i ne sont pas nécessairement linéairement indépendantes dans $H^2(S, \mathbf{Z}/2)$; il peut exister entre elles des relations, c'est-à-dire des ensembles $I \subset [1, \mu]$ tels que $\Sigma_{i \in I}[E_i] = 0$ dans $H^2(S, \mathbf{Z}/2)$.

DÉFINITION: *On dit qu'un ensemble $\{s_i\}_{i \in I}$ de points doubles de Σ est pair si la sommes des droites exceptionnelles correspondantes est nulle dans $H^2(S, \mathbf{Z}/2)$.*

Il est immédiat qu'on peut aussi définir les ensembles pairs par l'une des deux conditions suivantes (cf. [2], 2.2):
(a) Il existe un élément δ de Pic(S) tel que $\Sigma_{i \in I} E_i \equiv 2\delta$ dans Pic(S).
(b) Il existe un revêtement double $\pi: X \to S$ dont le lieu de ramification (dans S) est $\cup_{i \in I} E_i$.

La clé de la démonstration réside dans la proposition suivante.

PROPOSITION: *Soit I un ensemble pair non vide de points doubles de Σ. Alors I a 16 ou 20 éléments.*

Nous avons déjà rencontré au n° 1 des ensembles pairs de 16 points doubles, en partant d'une cubique lisse dans $\mathbf{P}^5$. Un ensemble pair de 20 points doubles est construit dans [2] à partir d'un système linéaire de quadriques dans $\mathbf{P}^4$. Tous les ensembles pairs de 16 ou 20 éléments sont obtenus par ces deux constructions [4].

La proposition est démontrée au n° 3; indiquons maintenant comment on peut en déduire le résultat que nous avons en vue. Il nous faut pour cela rappeler quelques définitions de théorie des codes.

Un *code* est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}_2^n$. Si x est un vecteur de $\mathbf{F}_2^n$, le nombre de coordonnées non nulles de x s'appelle le *poids* de x, et se note $w(x)$; les poids des vecteurs non nuls d'un code sont appelés les poids du code. Deux codes dans $\mathbf{F}_2^n$ sont dits isomorphes s'ils se déduisent l'un de l'autre par une permutation des coordonnées; ils ont alors les mêmes poids.

Voici deux exemples de codes ayant très peu de poids:

(i) Soient V un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbf{F}_2$, Ω l'ensemble des formes linéaires non nulles sur V. L'homomorphisme $x \mapsto (f(x))_{f\in\Omega}$ de V dans $\mathbf{F}_2^\Omega$ identifie V à un code $\mathscr{C}_p \subset \mathbf{F}_2^n$, avec $\dim \mathscr{C}_p = p$, $n = 2^p - 1$. Le code $\mathscr{C}_p$ a pour seul poids $2^{p-1} = (n+1)/2$.

(ii) Posons $n = 2^{p-1}$, et notons simplement $\mathbf{F}_2^{n-1}$ le sous-espace de $\mathbf{F}_2^n$ engendré par les $(n-1)$ premiers vecteurs de base. Dans $\mathbf{F}_2^n$, considérons le code $\mathscr{D}_p$ engendré par $\mathscr{C}_{p-1} \subset \mathbf{F}_2^{n-1}$ et par le vecteur de poids n. C'est un code de dimension p dans $\mathbf{F}_2^n$, qui a pour poids $n/2$ et n.

Le seul résultat de théorie des codes que nous utiliserons est le lemme suivant, qui m'a été indiqué par M. Teissier-Daguenet:

LEMME 1: *Soit $V \subset \mathbf{F}_2^n$ un code de dimension p.*

(i) *Supposons que les poids de V soient strictement supérieurs à $n/2$. On a alors $n \geq 2^p - 1$; s'il y a égalité, le code V est isomorphe à $\mathscr{C}_p$.*

(ii) *Supposons les poids de V supérieurs à $n/2$; on a alors $n \geq 2^{p-1}$. En cas d'égalité, V est isomorphe au code $\mathscr{D}_p$.*

Le lemme 1 sera démontré au n° 4; montrons tout de suite comment le théorème résulte du lemme 1 et de la proposition.

THÉORÈME: *On a* $\mu(5) = 31$.

DÉMONSTRATION: Supposons que la quintique $\Sigma \subset \mathbf{P}^3$ admette (au moins) 32 points doubles. On associe aux droites $E_1, \dots, E_{32}$ correspondantes un homomorphisme $\varphi: \mathbf{F}_2^{32} \to H^2(S, \mathbf{Z}/2)$.

Considérons le code $K = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Puisque $H^2(S, \mathbf{Z}/2)$ est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension 53 et que $\mathrm{Im}(\varphi)$ en est un sous-espace totalement isotrope, on a $\dim \mathrm{Im}(\varphi) \leq 26$, d'où $\dim(K) \geq 6$. D'autre part la proposition signifie que le code $K \subset \mathbf{F}_2^{32}$ a pour seuls poids 16 et 20. L'assertion (ii) du lemme 1 conduit alors à une contradiction.

REMARQUES: (1) On obtient de plus une description précise des relations entre les E_i pour une quintique avec 31 points doubles: il résulte en effet du lemme 1 (i) que le noyau de l'homomorphisme $\mathbf{F}_2^{31} \to H^2(S, \mathbf{Z}/2)$ est isomorphe au code $\mathscr{C}_5$. Une telle quintique contient donc 31 ensembles pairs de points doubles, ayant chacun 16 éléments; en particulier, compte tenu du résultat de Catanese cité après l'énoncé de la proposition, une quintique à 31 points doubles est toujours une surface de Togliatti.

(2) La même méthode s'applique aux surfaces K3, et permet de retrouver les résultats classiques sur les "ensembles syzygétiques" de points doubles: si Σ est une surface $K3$ avec 16 points doubles ordinaires et S sa désingularisée, le noyau de l'homomorphisme $\mathbf{F}_2^{16} \to H^2(S, \mathbf{Z}/2)$ est isomorphe au code $\mathscr{D}_5$. Cette idée avait déjà été utilisée par Nikulin [16], pour prouver notamment que Σ est alors une surface de Kummer.

(3) La méthode devrait a priori s'appliquer également aux surfaces de degré n dans $\mathbf{P}^3$. Mais aussi bien la partie géométrique (caractérisation des ensembles pairs de points doubles) que la partie combinatoire (majoration de la dimension d'un code de poids donnés) semblent nettement plus difficiles en degré ≥ 6.

3. Démonstration de la proposition

LEMME 2: *Soient X, S deux surfaces lisses, $(C_i)_{i\in I}$ une famille de courbes lisses disjointes sur S, $\pi: X \to S$ un revêtement double ramifié le long des C_i. Soient $\varphi: \mathbf{F}_2^I \to \mathrm{Pic}(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_2$ l'homomorphisme associé aux C_i, et e l'élément de $\mathbf{F}_2^I$ somme des vecteurs de la base canonique. Supposons que* $\mathrm{Pic}(S)$ *n'ait pas de 2-torsion; alors le groupe de 2-torsion de* $\mathrm{Pic}(X)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ker}(\varphi)/\mathbf{F}_2 e$.

Notons K_X (resp. K_S) le corps des fonctions rationnelles sur X (resp. S), et G le groupe de Galois (cyclique d'ordre 2) du revêtement $X \to S$. Considérons la suite exacte de G-modules:

$$0 \to K_X^*/\mathbf{C}^* \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0.$$

Comme les groupes $H^2(G, \mathbf{C}^*)$ et $H^1(G, K_X^*)$ sont nuls (théorème 90), on a $H^1(G, K_X^*/\mathbf{C}^*) = 0$, d'où un diagramme de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_S^*/\mathbf{C}^* & \longrightarrow & \mathrm{Div}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(S) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \to & (K_X^*/\mathbf{C}^*)^G & \to & \mathrm{Div}(X)^G & \to & \mathrm{Pic}(X)^G & \to & 0 \end{array}$$

où α, β, γ sont les homomorphismes d'image réciproque par π.

Le conoyau de α est isomorphe à $H^1(G, \mathbf{C}^*) \cong \mathbf{Z}/2$; on vérifie aisément que le conoyau de β est isomorphe à $\mathbf{F}_2^I$ et que l'homomorphisme naturel $\mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta)$ a pour image $\mathbf{F}_2 e$. On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X)^G \to \mathbf{F}_2^I/\mathbf{F}_2 e \to 0.$$

En appliquant le lemme du serpent à la multiplication par 2 dans cette suite, on obtient un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(\varphi)/\mathbf{F}_2 e$ sur le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ formé des éléments d'ordre 2 et invariants par G. Il reste à montrer que tout faisceau inversible L sur X d'ordre 2 est invariant par l'involution σ de X qui échange les deux feuillets du revêtement $X \to S$; on a en effet $\mathrm{Nm}(L) \cong \mathcal{O}_S$ puisque $\mathrm{Pic}(S)$ n'a pas de 2-torsion, d'où $\pi^* \mathrm{Nm}(L) = \sigma^* L \otimes L = \mathcal{O}_X$ et $\sigma^* L = L$.

Démonstration de la proposition: Soit $(s_i)_{i\in I}$ un ensemble pair de points doubles, de cardinal p, et soit $\pi:\hat{X}\to S$ le revêtement double ramifié le long de $\cup_{i\in I} E_i$. Notons $\tilde{E}_i$ la courbe sur $\hat{X}$ telle que $\pi(\tilde{E}_i)=E_i$; les $\tilde{E}_i$ sont des courbes rationnelles de carré (-1), donc il existe une surface lisse X et un morphisme birationnel $\epsilon:\hat{X}\to X$ qui contracte chaque $\tilde{E}_i$ sur un point.

Rappelons ([2], 2.2) qu'on a

$$\pi_*\mathcal{O}_{\hat{X}}=\mathcal{O}_S\oplus\mathcal{O}_S(-\delta)\qquad K_{\hat{X}}\equiv\pi^*(K_S+\delta)$$

où δ est l'élément de $\mathrm{Pic}(S)$ tel que $2\delta\equiv\Sigma_{i\in I}E_i$; comme $\delta^2=\frac{1}{4}(\Sigma E_i)^2=-p/2$ et $\delta.K=0$, on trouve: $\chi(\mathcal{O}_X)=\chi(\mathcal{O}_{\hat{X}})=2\chi(\mathcal{O}_S)+\frac{1}{2}(\delta^2+\delta K)$ par Riemann-Roch,

$$\text{soit } \chi(\mathcal{O}_X)=10-\frac{p}{4} \tag{1}$$

$$(K_{\hat{X}})^2=2(K_S+\delta)^2=2K_S^2-p$$

$$\text{d'où } K_X^2=2K_S^2=10 \tag{2}$$

Notons qu'il résulte de (1) que p est divisible par 4.

(1) Le cas $p<16$

Supposons $p<16$; on a alors $\chi(\mathcal{O}_X)\geqslant 7$, et en particulier $p_g(X)>p_g(S)$. Puisque l'application canonique de S est un morphisme birationnel de S sur son image dans $\mathbf{P}^3$, il en résulte aussitôt que l'application canonique de X est birationnelle. Ceci entraîne ([2], th. 5.5) que la surface X satisfait à l'inégalité de Castelnuovo $K_X^2\geqslant 3p_g(X)-7\geqslant 3\chi(\mathcal{O}_X)-10$. En reportant dans cette inégalité les formules (1) et (2), on obtient $p\geqslant 16$, d'où une contradiction.

(2) Le cas $p>20$

Supposons $p>20$; on trouve alors $\chi(\mathcal{O}_X)\leqslant 4$, d'où en particulier $q(X)\geqslant 1$. Le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ contient alors des éléments de 2-torsion; d'après le lemme 2, ceci entraîne qu'il existe un sous-ensemble J de I, non vide et distinct de I, qui est lui-même pair. Mais alors l'ensemble I–J est également pair; ceci élimine les cas $p=24$ et $p=28$, car l'un des deux ensembles J ou I–J devrait être de cardinal <16.

Supposons $p=32$. On a alors $q(X)\geqslant 3$, d'où $\dim_{\mathbf{F}_2}(\mathrm{Pic}(X)_2)\geqslant 6$. Considérons l'homomorphisme $\varphi:\mathbf{F}_2^{32}\to\mathrm{Pic}(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{F}_2$ associé aux E_i $(i\in I)$ et le code $K=\mathrm{Ker}(\varphi)$ dans $\mathbf{F}_2^{32}$. Le lemme 2 entraîne $\dim(K)\geqslant 7$, et d'après ce qui précède les poids de K sont supérieurs à 16: ceci contredit le lemme 1.

Enfin si $p\geqslant 36$ on obtient $K_X^2=10$ et $\chi(\mathcal{O}_X)\leqslant 1$, ce qui contredit l'inégalité de Miyaoka $K_X^2\leqslant 9\chi(\mathcal{O}_X)$ [5].

4. Démonstration du lemme 1

(a) Soit V un code de dimension p dans $\mathbf{F}_2^n$, de poids strictement supérieurs à $n/2$; démontrons l'inégalité $n\geqslant 2^p-1$ par récurrence sur p (l'inégalité étant triviale pour $p=1$). Soit a un élément de V de poids minimal; si $a=\Sigma_{i\in A}e_i$, notons E_1 (resp. E_0) le sous-espace de $\mathbf{F}_2^n$ engendré par les e_i pour $i\in A$ (resp. $i\notin A$), de sorte que $\mathbf{F}_2^n=E_0\oplus E_1$. Soit p_0 la projection de $\mathbf{F}_2^n$ sur E_0 parallèlement à E_1. On a $\mathrm{Ker}(p_{0|_V})=E_1\cap V=\mathbf{F}_2a$ puisque a est de poids minimal. Ainsi $p_0(V)$ est un code de dimension $p-1$ dans E_0 (muni de la base $(e_i)_{i\notin A}$).

Montrons que $p_0(V)$ satisfait l'hypothèse de récurrence. Soit x un élément de V distinct de a, qui se décompose en $x=x_0+x_1$, avec $x_0\in E_0$, $x_1\in E_1$. On a

$$w(a+x)=w(x_0)+w(a+x_1)=w(x_0)+w(a)-w(x_1).$$

La minimalité de $w(a)$ entraîne $w(x_0)\geqslant w(x_1)$, d'où

$$w(x_0)\geqslant\tfrac{1}{2}w(x)>\frac{n}{4} \tag{3}$$

D'autre part on a

$$\dim(E_1)=w(a)>n/2,\text{ d'où } n>2\dim(E_0) \tag{4}$$

Il résulte de (3) et (4) qu'on a $w(x_0)>\frac{1}{2}\dim(E_0)$, c'est-à-dire que le code $p_0(V)\subset E_0$ satisfait à l'hypothèse de récurrence. On a donc

$$\dim(E_0)\geqslant 2^{p-1}-1$$

et d'après (4): $n>2(2^{p-1}-1)$, autrement dit $n\geqslant 2^p-1$.

(b) L'inégalité $n\geqslant 2^{p-1}$ dans le cas (ii) se démontre de manière identique, les inégalités strictes dans (3) et (4) étant remplacées par des inégalités larges.

(c) Nous allons démontrer maintenant les assertions suivantes:

(i_p): *Soit V un code de dimension p dans $\mathbf{F}_2^n$, avec $n=2^p-1$, de poids strictement supérieurs à $n/2$. Alors V est isomorphe à $\mathscr{C}_p$.*

(ii_p): *Soit V un code de dimension p dans $\mathbf{F}_2^n$, avec $n=2^{p-1}$, de poids supérieurs à $n/2$. Alors V est isomorphe à $\mathscr{D}_p$.*

Notons que les deux assertions sont triviales pour $p=1$.

d) Remarquons d'abord que (i_{p-1}) entraîne (ii_p).

Soit en effet $W \subset \mathbf{F}_2^n$ $(n = 2^{p-1})$ un code de dimension p et de poids $\geqslant n/2$. Pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, le code $W \cap \operatorname{Ker}(e_i^*) \subset \mathbf{F}_2^{n-1}$ est de dimension $(p-1)$ et de poids strictement supérieurs à $(n-1)/2$; d'après (i_{p-1}), il est isomorphe à $\mathscr{C}_{p-1}$, et en particulier tous ses vecteurs non nuls sont de poids $n/2$. Il en résulte que tous les vecteurs non nuls de W sont de poids $n/2$, sauf peut-être le vecteur $e = \sum_{i=1}^n e_i$. Mais si e n'appartenait pas à W, le code $W + \mathbf{F}_2 e$ serait de dimension $p+1$ dans $\mathbf{F}_2^n$ $(n = 2^{p-1})$ et de poids $\geqslant n/2$, ce qui contredirait b). Donc W contient e, et $W = \mathscr{C}_{p-1} + \mathbf{F}_2 e$ est isomorphe à $\mathscr{D}_p$.

(e) Montrons maintenant que (i_{p-1}) entraine (i_p).

Reprenons la construction de a), sous l'hypothèse supplémentaire $n = 2^p - 1$. On a ici d'après (4) $\dim(E_0) = 2^{p-1} - 1$ et $\dim(E_1) = 2^{p-1}$. D'après (i_{p-1}), le code $p_0(V) \subset E_0$ est isomorphe à $\mathscr{C}_{p-1}$; nous allons considérer aussi la projection $p_1 : \mathbf{F}_2^n \to E_1$ de noyau E_0, et montrer que le code $p_1(V) \subset E_1$ est isomorphe à $\mathscr{D}_p$. Soit $x = x_0 + x_1$ un élément de V, avec $x_i \in E_i$ $(i = 0, 1)$. Si x_0 est non nul, on a $w(x_0) = 2^{p-2}$, d'où aussi $w(x_1) = 2^{p-2}$ par (3); si x_0 est nul, x est égal à 0 ou a. Ainsi les poids du code $p_1(V) \subset E_1$ sont supérieurs à $\frac{1}{2}\dim E_1$. Puisque les poids de V sont strictement supérieurs à $\dim E_0$, on a $E_0 \cap V = (0)$, de sorte que $p_1(V)$ est de dimension p. On déduit alors de (i_{p-1}) et de d) que le code $p_1(V) \subset E_1$ est isomorphe à $\mathscr{D}_p$.

Ceci étant, pour montrer que le code V est isomorphe à $\mathscr{C}_p$, il suffit de prouver que pour tout couple d'entiers distincts (i, j) de $[1, n]$, les formes linéaires e_i^* et e_j^*, restreintes à V, sont différentes. Si $i, j \in A$ (resp. $i, j \notin A$), cela résulte du fait que les restrictions de e_i^* et e_j^* à $p_1(V)$ (resp. à $p_0(V)$) sont distinctes, par construction des codes $\mathscr{C}_{p-1}$ et $\mathscr{D}_p$. Si $i \in A$ et $j \notin A$, on a $\langle e_i^*, a\rangle = 1$ et $\langle e_j^*, a\rangle = 0$, d'où le résultat.

Ceci prouve l'implication $(i_{p-1}) \Rightarrow (i_p)$ et donc, par récurrence sur p, l'assertion (i_p) pour tout p. L'assertion (ii_p) résulte alors de d); ceci achève la démonstration du lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.B. BASSET: The maximum number of double points on a surface. Nature, *73* (1906) 246.

[2] A. BEAUVILLE: L'application canonique pour les surfaces de type général. Inventiones math. *55* (1979) 121–140.

[3] D. BURNS–J. WAHL: Local contributions to global deformations of surfaces. Inventiones math. *26* (1974) 67–88.

[4] F. CATANESE: Babbage's conjecture, contact of surfaces, symmetric determinantal varieties and applications (à paraître).

[5] Y. MIYAOKA: On the Chern numbers of surfaces of general type. Inventiones math. *42* (1977) 225–237.

[6] V.V. NIKULIN: On Kummer surfaces. Math. USSR Izvestija *9*, (1975) 261–275.

[7] B. SEGRE: Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine. Bull. U.M.I. *2* (1947) 204–212.

[8] F. SEVERI: Sul massimo numero di node di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario o di una forma di un iperspazio. Annali di Mat. *25* (1946) 1–41.

[9] E. TOGLIATTI: Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi. Scritti offerti a L. Berzolari p. 577–593, Pavia (1936).

[10] E. TOGLIATTI: Una notevole superficie di 5° ordine con soli punti doppi isolati. Festchrift R. Fueter Zürich (1940), 127–132.

Faculté des Sciences
Boulevard Lavoisier
49045 Angers Cédex (France)