Master 2 Mathématiques fondamentales

SEMESTRE 1 (S3 du master)

U.E. 1, Analyse réelle et Probabilités

PARTIE 1 : ANALYSE RÉELLE

- Suites et séries à termes réels.
  - Relations de comparaison et sommation
  - Convergence, valeurs d'adhérences, liminf, limsup, sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.
  - Calculs de limites et de sommes.
  - Suites récurrentes, rapidité de convergence, développement asymptotique
  - Accélération de la convergence des suites, Méthode de Newton.
- Fonctions
  - Continuité, dérivabilité, continuité uniforme
  - Convergence des suites et séries de fonctions, continuité, dérivabilité de la limite.
- Intégrales
  - Techniques de calcul d'intégrales
  - Intégrales impropres
  - Interversion limites intégrales

PARTIE 2 : PROBABILITÉS

- Variables aléatoires
  - Variable aléatoire, lois classiques, théorème de transfert.
  - Espérance, variance, inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Jensen.
  - Calculs de lois de probabilité, fonction de répartition, fonction quantile, fonction génératrice, fonction caractéristique. Simulation de variables aléatoires.
  - Indépendance d'événements et de variables aléatoires, Lemmes de Borel-Cantelli, loi du 0-1.
  - Somme de variables aléatoires indépendantes.
  - Probabilités conditionnelles, formule de Bayes.
- Convergence de variables aléatoires
  - Convergences presque sûr, en probabilité, dans L^p, en loi.
  - Les grands théorèmes limites (loi forte et faible des grands nombres, théorème central limite), théorème de Lévy.
  - Applications : méthode de Monte Carlo, construction d'intervalle de confiance en statistique.

U.E. 2, Groupes et géométrie

- Action d'un groupe sur un ensemble
  - Équation aux classes, formule de Burnside.
  - Théorème de Wedderburn.
  - Groupe des isométries du cube et du tétraèdre régulier.
  - Sous-groupes finis de $O(2)$, de $SO(3)$.
- Groupes finis
  - p-groupes, groupes de Sylow et théorèmes de Sylow.
  - Applications aux groupes simples.
  - Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
  - Simplicité de $\mathcal{A}_n$.
  - À isomorphisme près, $\mathcal{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.
- Groupes abéliens de type fini

  - Produit direct et produit semi-direct de groupes.
  - Structure des groupes abéliens de type fini.
- Géométrie projective
  - Droite projective réelle et complexe.
  - Homographies, groupe des homographies, birapport.
- Racines de l'unité
  - Groupes des nombres complexes de module 1, sous-groupes des racines de l'unité, applications.
- Représentation d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  - Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution.
  - Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles.
  - Exemple de représentations de groupes de petit cardinal.
  - Applications : Théorèmes de Burnside.

U.E. 3, Topologie, calcul différentiel et équations différentielles

- Topologie
  - Topologie sur les espaces métriques, topologie induite, produit fini d'espaces métriques.
  - Topologie dans les espaces vectoriels normés, normes équivalentes, cas de la dimension finie.
  - Compacité, équivalence entre Bolzano-Weierstrass et Borel-Lebesgue.
  - Complétude, espaces de Banach, séries absolument convergentes dans un espace de Banach, espaces classiques.
  - Connexité, composantes connexes, connexité par arcs.
  - Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.
  - Applications lipschitziennes, théorèmes de points fixes.
- Equations Différentielles
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, wronskien, exponentielle de matrices.
  - Résolution d'équations différentielles linéaires (coefficients constants, systèmes), méthode de variation de la constante.
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, lemme de Gronwall, théorème des bouts.
  - Études qualitatives des équations différentielles autonomes, portrait de phase, système de Lotka-Volterra.
  - Stabilité des points d'équilibre, théorème de linéarisation.
- Calcul différentiel
  - Différentielle, dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles, matrice hessienne, composition, théorème des accroissements finis, théorème de Schwarz.
  - Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, applications.
  - Extremums, conditions nécessaire et suffisante dans la recherche d'extremum.
  - Fonctions monotones et convexes à variables réelles.
  - Comparaison séries-intégrales.
- Équations aux dérivées partielles linéaires
  - Équation de transport et méthode des caractéristiques.
  - Équation de la chaleur, sur un intervalle avec les séries de Fourier, sur $\mathbb{R}$ avec la transformée de Fourier.

U.E. 4, Algèbre linéaire et bilinéaire

- Algèbre linéaire
  - Définition de la dimension, base incomplète, formule de Grassmann
  - Applications linéaires, matrices, rang, opérations élémentaires
  - Dualité en algèbre linéaire, définition d'un sous-espace par une famille génératrice ou par un système d'équations

  - Définition du déterminant, utilisations du déterminant
  - Endomorphismes remarquables : projecteurs, symétries, nilpotents
  - Réduction des endomorphismes : Sous-espaces stables, polynômes d'endomorphismes, théorème de Cayley-Hamilton, réduction de Jordan et Frobenius, décomposition de Dunford.
  - Exponentielle de matrices
  - Topologie matricielle
- Algèbre bilinéaire
  - Formes bilinéaires, quadratiques : polarisation, rang, noyau, matrices congruentes.
  - Orthogonalité, isotropie, algorithme de Gauss.
  - Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et les corps finis.
  - Espaces euclidiens/ hermitiens : adjoint d'un endomorphisme, diagonalisation des endomorphismes normaux, "réduction simultanée".
  - Isométries vectorielles : générateurs du groupe orthogonal, classification et réduction en dimension 2 et 3.
  - Algèbre sesquilinéaire : formes quadratiques hermitiennes, signature, groupe unitaire.

U.E. 5, Fonctions holomorphes et intégration

- Séries entières
  - Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.
  - Transformation d'Abel et applications.
  - Utilisation des séries entières (calcul d'intégrales, de suites, de solutions d'équations différentielles, problèmes de dénombrement).
- Fonctions holomorphes
  - Conditions de Cauchy-Riemann.
  - Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux.
  - Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point. Formule de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique.
  - Détermination du logarithme, de la racine complexe.
  - Singularités isolées. Fonctions méromorphes. Séries de Laurent. Théorème des résidus.
  - Suites et séries de fonctions holomorphes et méromorphes.
  - Compléments. Théorème de l'image ouverte. Inversion locale.
- Intégration
  - Rappels de théorie de l'intégration. Théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Théorème de convergence dominée.
  - Esapces L^p. Complétude. Inégalité de Hölder.
  - Théorème de Fubini.
  - Changement de variables dans une intégrale multiple.
- Intégrales à paramètres et transformées
  - Rappels sur l'intégrale à paramètre . Continuité. Dérivabilité. Application à la transformation de Laplace.
  - Convolution. Régularisation et approximation par convolution.
  - Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. Théorème d'inversion de Fourier L^1. Transformation de Fourier-Plancherel.
  - Intégrales à paramètre et holomorphie. Application à la fonction Γ.
- Séries de Fourier
  - Lemme de Riemann-Lebesgue.
  - Produit de convolution de fonctions périodiques.
  - Théorème de Dirichlet.
  - Théorème de Féjer et applications.
  - Théorème de Parseval.

SEMESTRE 2 (S4 du master)

U.E. 6, Analyse fonctionnelle et convexité

- Géométrie différentielle
  - Exemples pratiques d'applications de l'inversion locale et des fonctions implicites.
  - Problèmes d'extremum, Théorème des extremas liés et applications.
  - Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, espace tangent, position relative, cas des courbes et des surfaces.
- Distributions tempérées
  - Espace de Schwartz. Espace des distributions tempérées.
  - Dérivation. Formule des sauts en dimension 1.
  - Convolution d'une distribution tempérée et d'une fonction de $\mathcal{S}$.
  - Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.
  - Solutions fondamentales (laplacien, chaleur, ondes, etc).
- Espaces de Hilbert
  - Théorème de projection sur un convexe.
  - Bases hilbertiennes (séries de Fourier, polynômes orthogonaux).
  - Espace $H_0^1(]0,1[)$, problème de Dirichlet 1d, théorème de Lax-Milgram.
- Convexité
  - Parties convexes, points extrémaux.
  - Théorèmes de Carathéodory, de Minkowski (Krein-Milman).
  - Théorème de séparation des convexes de Hahn-Banach dans le cas euclidien.
- Analyse fonctionnelle
  - Théorèmes de Banach-Steinhaus et applications.
  - Théorème d'Ascoli et Théorème de Montel.
  - Diagonalisation des Opérateurs compacts.

U.E. 7, Corps et géométrie

- Arithmétique
  - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, fonction indicatrice d'Euler, théorème chinois.
  - Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
  - Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$, irréductibilité sur $\mathbb{Q}$, théorème de Dirichlet.
  - Entiers de Gauss et Théorème des deux carrés.
- Anneaux
  - Propriétés arithmétiques des anneaux.
  - Anneaux factoriels, principaux, noethériens.
- Extensions de corps
  - Polynômes et racines, polynômes symétriques, localisation des racines.
  - Critères d'irréductibilité des polynômes.
  - Résultant et discriminant, application à l'intersection de courbes et surfaces algébriques.
  - Nombres algébriques et transcendants, extensions algébriques.
  - Corps de rupture, de décomposition, théorème de l'élément primitif.
  - $\mathbb{C}$ algébriquement clos.
  - Corps finis, morphisme de Frobenius, théorème de Chevalley.
  - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples.
- Géométrie affine et euclidienne
  - Espace affine et espace vectoriel associé, barycentres.
  - Transformations affines, groupe affine.
  - Isométries d'un espace affine euclidien.
  - Classification des isométries en dimension 2 et 3.
  - Théorème de Desargues, Menélaous, Pappus, ...
  - Coniques, théorème de Pascal.

U.E. 8, Modélisation et simulation

Première option, U.E. 8A, Modélisation et probabilités, option A

- Chaines de Markov
  - Chaine de markov à espace d'états fini ou dénombrable, classification des états, récurrence, transience, mesure stationnaire.
  - Théorème de convergence : loi des grands nombres, apériodicité et convergence en loi.
  - Exemples du processus de Galton-Watson et de la marche aléatoire simple.
- Processus de Poisson
  - Construction du processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ à partir de variables exponentielles.
  - Indépendance, stationnarité et loi des accroissements.
- Espérance conditionnelle
  - Espérance conditionnelle, définition des (sur/sous-)martingales à temps discrets, temps d'arrêt.
  - Exemples d'utilisation des théorèmes d'arrêt et de convergence presque sûre et L^2.
- Statistiques
  - Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.
  - Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition, exemples et contre-exemples.
  - Tests paramétriques. Tests d'ajustement (tests du χ^2, tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.
- Vecteurs gaussiens
  - Vecteurs gaussiens : définition, simulation, théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbb{R}^n$.
  - Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire, exemples d'utilisation.

Seconde option, U.E. 8B, Modélisation et calcul scientifique, option B

- Algèbre linéaire
  - Normes matricielles, rayon spectral, conditionnement.
  - Systèmes linéaires : méthodes directes et itératives (convergence, lien avec le rayon spectral).
  - Recherche d'éléments propres (par exemple méthode de la puissance).
  - Théorème de Perron-Frobenius.
- Résolution d'équations non linéaires, Optimisation
  - Méthode de dichotomie, de Picard, de Newton : convergence et estimation d'erreur.
  - Minimisation de fonctions convexes (dimension finie), méthode de gradient (à pas constant). Moindres carrés.
  - Minimisation sous contrainte.
- Équations différentielles
  - Consistance, stabilité, convergence, ordre d'un schéma numérique.
  - Méthode d'Euler explicite (stabilité, ordre de consistance, ordre de convergence). Comparaison avec Euler implicite, avec Runge-Kutta. Problèmes raides.
  - Portraits de phase, stabilité par linéarisation.
- Modélisation
  - Quelques aspects de modélisation de situations concrètes (physique, biologique, etc), critiques des modèles.
  - Dérivation des équations (elliptiques, paraboliques, hyperboliques...).
- Équations aux Dérivées Partielles
  - Application de Lax-Milgram aux équations elliptiques en dimension 1.
  - Laplacien en 1d : approximation par différences finies, forme matricielle. Notions de stabilité, consistance, convergence et ordre.

- Techniques de résolution classiques (équation de transport, équation de la chaleur).
- Approximation par différences finies : notions de stabilité (condition CFL), consistance, convergence et ordre. Approximation spectrale (FFT).

U.E. 9, Mémoire, leçons, oraux